Analyse dimensionnelle:

Fondements et Principe de l'analyse dimensionnelle - Exemples résolus de génie des procédés

Guillaume Delaplace, Karine Loubière, Fabrice Ducept, Romain Jeantet

Plan

Analyse dimensionnelle de la puissance consommée d'un agitateur plan

Généricité de l'approche - Analyse dimensionnelle d'un mélangeur planétaire et comparaison à un autre agitateur

L'agitation mélange: une opération centrale en IAA

❑ Mélange et dispersion en cuves mécaniquement agitées

❑ Liquide/liquide, miscibles (standardisation de composition) ou non (émulsions) → stockage du lait à la ferme, des produits finis en vrac avant conditionnement, etc.

❑ Liquide/solide, en maintenant les particules en suspension afin que la surface offerte au liquide soit maximale pour faciliter les échanges entre les deux phases et la dissolution de la phase solide (réhydratation, poudrage)

❑ Liquide/gaz (produits foisonnés, carbonatation, etc.)

❑ Transfert de chaleur

❑ Renouvellement du produit au contact d'une paroi chaude ou froide et amélioration des transferts de chaleur

❑ Maturation physique des crèmes laitières, cristallisation du lactose, freezer

❑ Traitements thermiques en cuve

❑ Texturation

❑ Cisaillement (mousse de blanc d'œuf, pétrissage de la pâte à pain, émulsion)

❑ Changement de phase au sein du produit (fusion) par apport de chaleur (fromage fondu et cutterage)

Analyse dimensionnelle de la puissance consommée par un fluide newtonien dans une cuve mécaniquement agitée

Objectif

Etablir une relation de procédé permettant de maîtriser la puissance dissipée (P) au sein du fluide

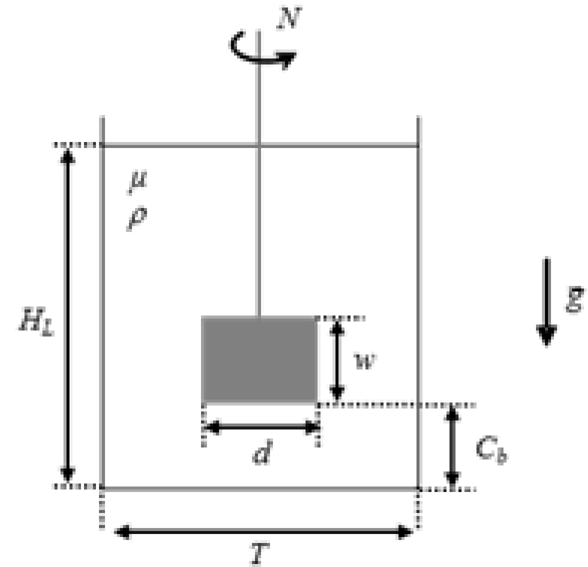
Liste des grandeurs physiques

↓

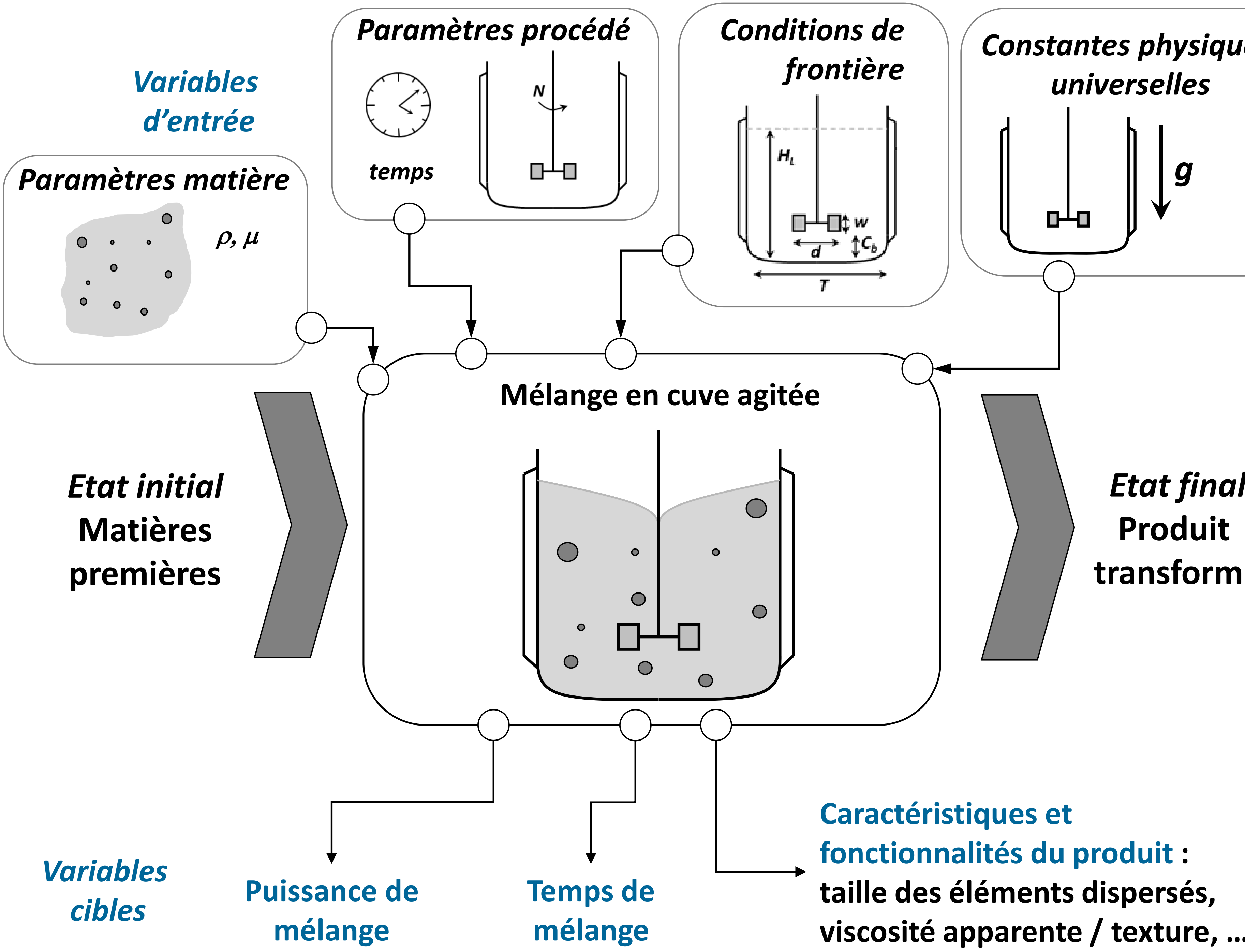
Propriétés matériau constantes

↓ oui

Système d'unités et dimensions



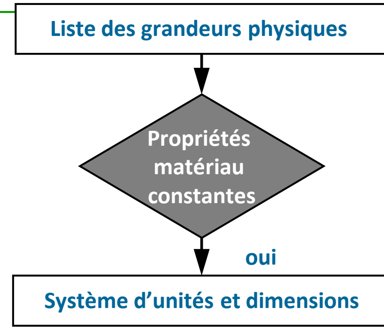
- ❑ **Liste des grandeurs physiques indépendantes**
  - ❑ *paramètres matière*
  - ❑ *paramètres de procédé*
  - ❑ *conditions aux frontières et initiales*
  - ❑ *constantes universelles*

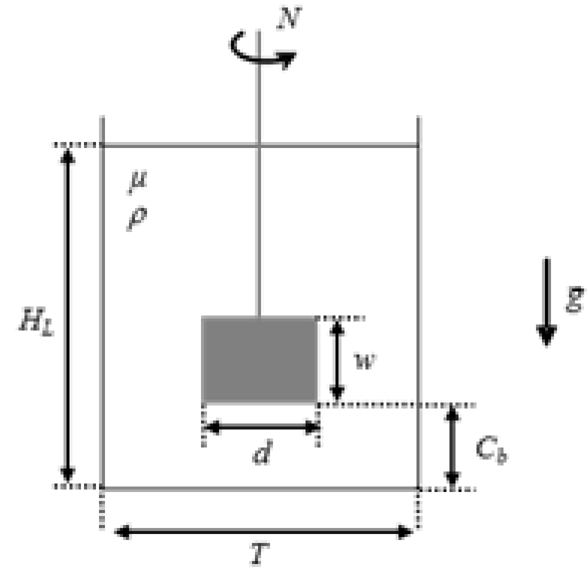

Variables d'entrée
Paramètres matière
ρ, μ
Paramètres procédé
N
temps
Conditions de frontière
H_L
w
C_b
d
T
Constantes physiques universelles
g
Etat initial
Matières premières
Mélange en cuve agitée
Etat final
Produit transformé
Variables cibles
Puissance de mélange
Temps de mélange
Caractéristiques et fonctionnalités du produit :
taille des éléments dispersés, viscosité apparente / texture, …

Analyse dimensionnelle de la puissance consommée par un fluide newtonien dans une cuve mécaniquement agitée

Objectif

Etablir une relation de procédé permettant de maîtriser la puissance dissipée (P) au sein du fluide





- **Liste des grandeurs physiques indépendantes**
  - *paramètres matière*
  - *paramètres de procédé*
  - *conditions aux frontières et initiales*
  - *constantes universelles*

- **Ecriture de la matrice aux dimensions**

	P	μ	ρ	N	d	w	H_L	C_b	T	g
M	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
L	2	-1	-3	0	1	1	1	1	1	1
T	-3	-1	0	-1	0	0	0	0	0	-2

Grandeurs physiques	Dimensions
P	$[M.L^{2}.T^{-3}]$
μ	$[M.L^{-1}.T^{-1}]$
ρ	$[M.L^{-3}]$
N	$[T^{-1}]$
d	$[L]$
T	$[L]$
w	$[L]$
H_L	$[L]$
C_b	$[L]$
g	$[L.T^{-2}]$

Choix de la base et établissement des nombres sans dimensions - Mesures internes

Mesure interne

- Référencement de la **dimension** d'une grandeur physique *G* / à celles d'un jeu de grandeurs physiques appartenant au système étudié = **variables physiques répétées** (ou **base**).

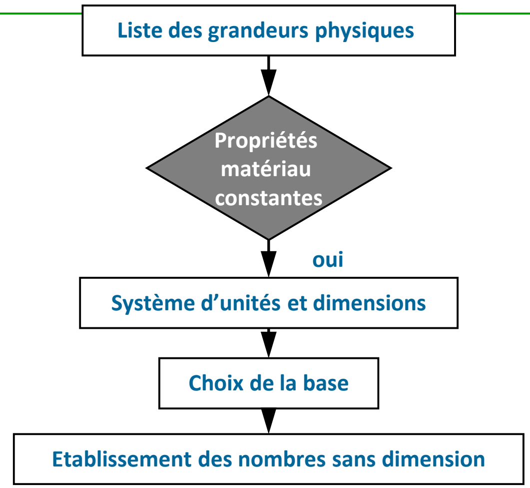
***n* grandeurs dimensionnellement indépendantes, définies par *p* dimensions fondamentales**

➡ ***p* variables physiques répétées**

Exemple

- **3 dimensions fondamentales** sont nécessaires pour définir les grandeurs physiques mises en jeu dans l'écoulement d'un fluide newtonien (ρ , μ) circulant à une vitesse *v* dans un tube de diamètre *D* ⇨ **(*L*: m; *M*: kg; *T*: s)**
- **3 variables physiques répétées** (ρ, *v* , *D* qui sont dimensionnellement indépendantes) ⇨ ***Re* est une mesure interne de μ dans cette base**
- **Base** (ρ, μ , *D*) ⇨ ***Re* est une mesure interne de *v***

Choix de la base et établissement des nombres sans dimensions - Mesures internes



❑ Choix de la base

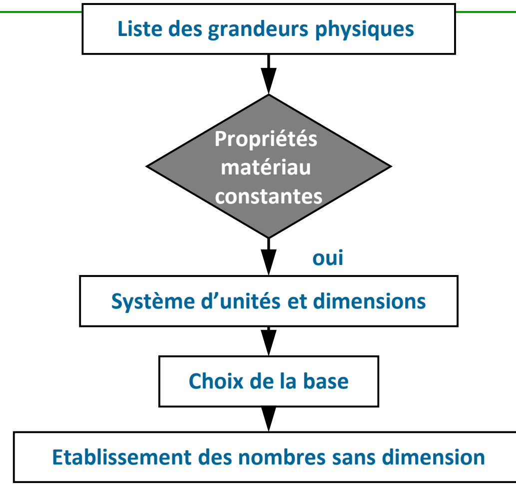
❑ 3 **dimensions fondamentales** pour exprimer les dimensions des grandeurs physiques listées → **théorème π: 7 mesures internes**

❑ **Base** (ρ, N, d) ⇨ indépendance dimensionnelle / couverture des dimensions des grandeurs physiques listées

❑ Matrice aux dimensions incluant la base

	P	μ	w	H_L	C_b	T	g	ρ	N	d
M	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
L	2	-1	1	1	1	1	1	-3	0	1
T	-3	-1	0	0	0	0	-2	0	-1	0

Choix de la base et établissement des nombres sans dimensions - Mesures internes



- **Transformation de la matrice aux dimensions (matrice centrale = identité)**

	P	μ	w	H_L	C_b	T	g	ρ	N	d
M	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
-T	3	1	0	0	0	0	2	0	1	0
L+3M	5	2	1	1	1	1	1	0	0	1

$$\pi_{cible} = \frac{P}{\rho . N^3 . d^5}$$

Nombre de puissance

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho . N . d^2}$$

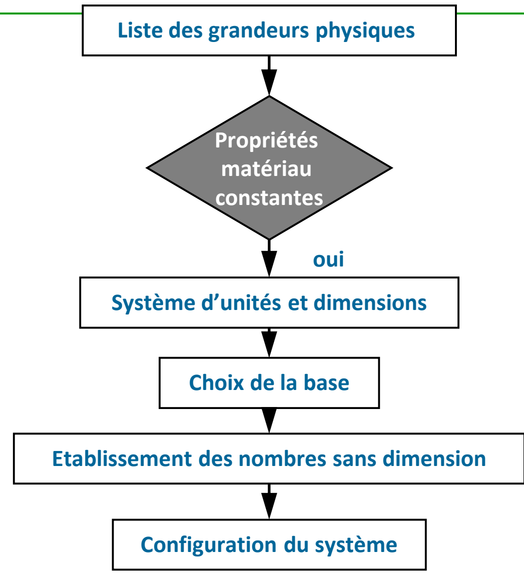
facteurs de forme

$$\pi_i = \frac{V_i}{d}$$

$$\pi_7 = \frac{g}{N^2 . d}$$

Chaque variable non répétée forme un **nombre sans dimension π_i** contenant **celle-ci au numérateur** et **les variables répétées élevées aux puissances indiquées dans la matrice modifiée au dénominateur**

Choix de la base et établissement des nombres sans dimensions - Mesures internes



- **Réarrangement des nombres sans dimensions**

$$(\pi_2)^{-1} = Re = \frac{\rho . N . d^2}{\mu} \qquad (\pi_7)^{-1} = Fr = \frac{N^2 . d}{g}$$

⇨ Vitesse caractéristique $u_c = \frac{u_p}{\pi}$

- **Configuration du système**

$$\pi_{cible} = \frac{P}{\rho . N^3 . d^5} = F\left(Re\ , Fr\ , \pi_4 = \frac{w}{d}\ , \pi_5 = \frac{H_L}{d}\ , \pi_6 = \frac{C_b}{d}\ , \pi_7 = \frac{T}{d}\right)$$

- **Programme expérimental nécessaire pour connaître l'impact des mesures internes sur π_{cible} (N_P)**
- **Stratégie expérimentale** ⇨ *exemple: mettre en œuvre des fluides de viscosités différentes pour faire varier séparément Fr et Re à même vitesse de rotation de l'agitateur*

Etablissement de la relation de procédé de P

Programme expérimental ***Delaplace et al. 2000, 2004***

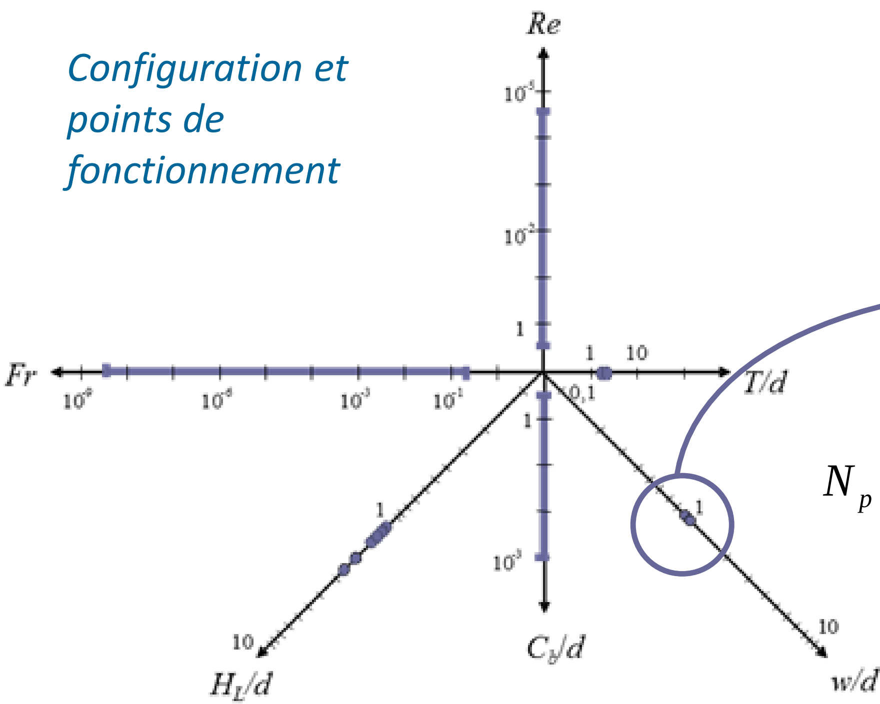
- *Cuves / agitateurs plans verticaux/ volumes de* ***très petites dimensions****:*

0,020 m < w < 0,051 m 0,024 m < H_L < 0,082 m 50 µm < C_b < 0,05 m 0,041 m < T < 0,105
0,020 m < d < 0,051 m

- *Mesures* ***fiables et précises***

C_b au micromètre près (système pneumatique), N mesurée par encodeur optique, puissances mesurées par des mesures de couples et faibles pertes par friction lors de la transmission du couple

Configuration et points de fonctionnement



Relation de procédé (forme monômiale)

$$N_p = C.(Re)^{e_2}.(Fr)^{e_3}.\left(\frac{T}{d}\right)^{e_4}.\left(\frac{w}{d}\right)^{e_5}.\left(\frac{H_L}{d}\right)^{e_6}.\left(\frac{C_b}{d}\right)^{e_7}$$

$$N_p = 199{,}4.(Re)^{-1{,}017}.(Fr)^{0{,}004}.\left(\frac{T}{d}\right)^{-0{,}963}.\left(\frac{H_L}{d}\right)^{0{,}103}.\left(\frac{C_b}{d}\right)^{-0{,}048}$$

Analyse de la relation de procédé de P

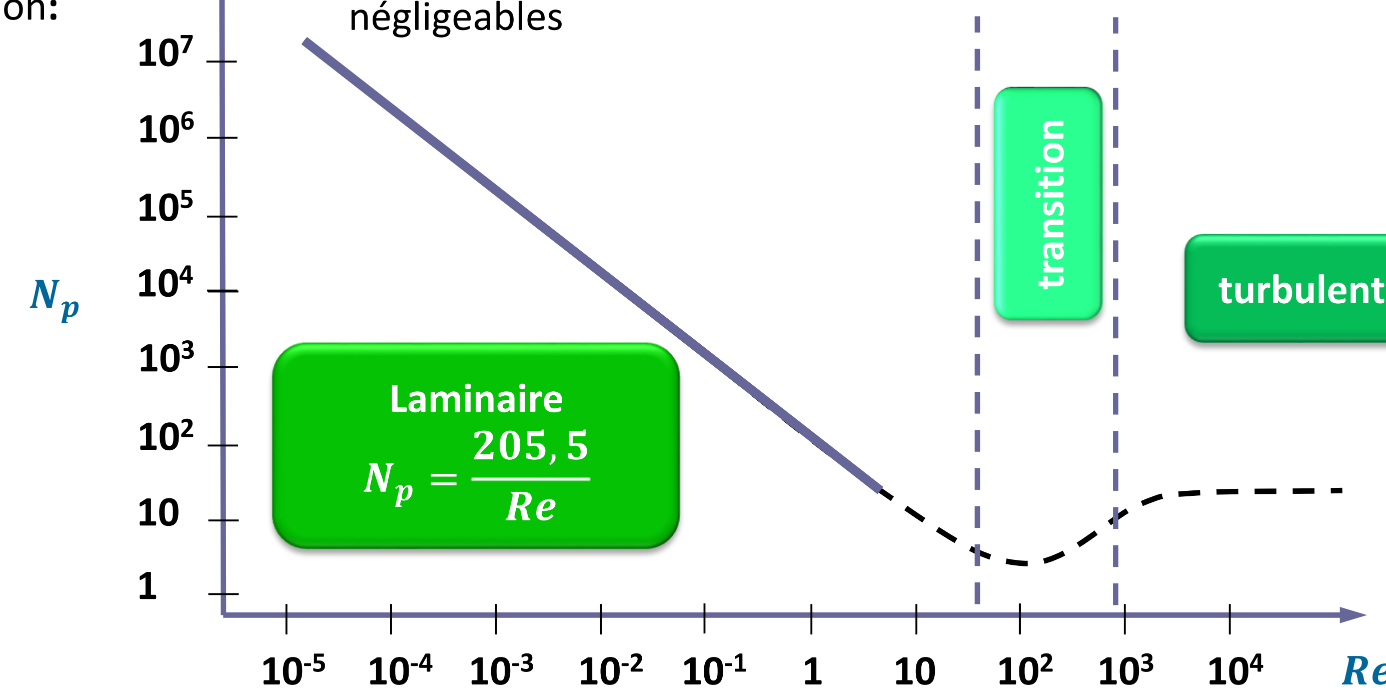
$$N_p = 199{,}4 . \boxed{(Re)^{-1{,}017}} . \boxed{(Fr)^{0{,}004}} . \left(\frac{T}{d}\right)^{-0{,}963} . \left(\frac{H_L}{d}\right)^{0{,}103} . \left(\frac{C_b}{d}\right)^{-0{,}048}$$

Exposant forcé à -1 ⇨ Constante de puissance K_p caractérisant la résistance à l'écoulement du système d'agitation et définie en l'absence de vortex lors de l'agitation d'un fluide newtonien selon:

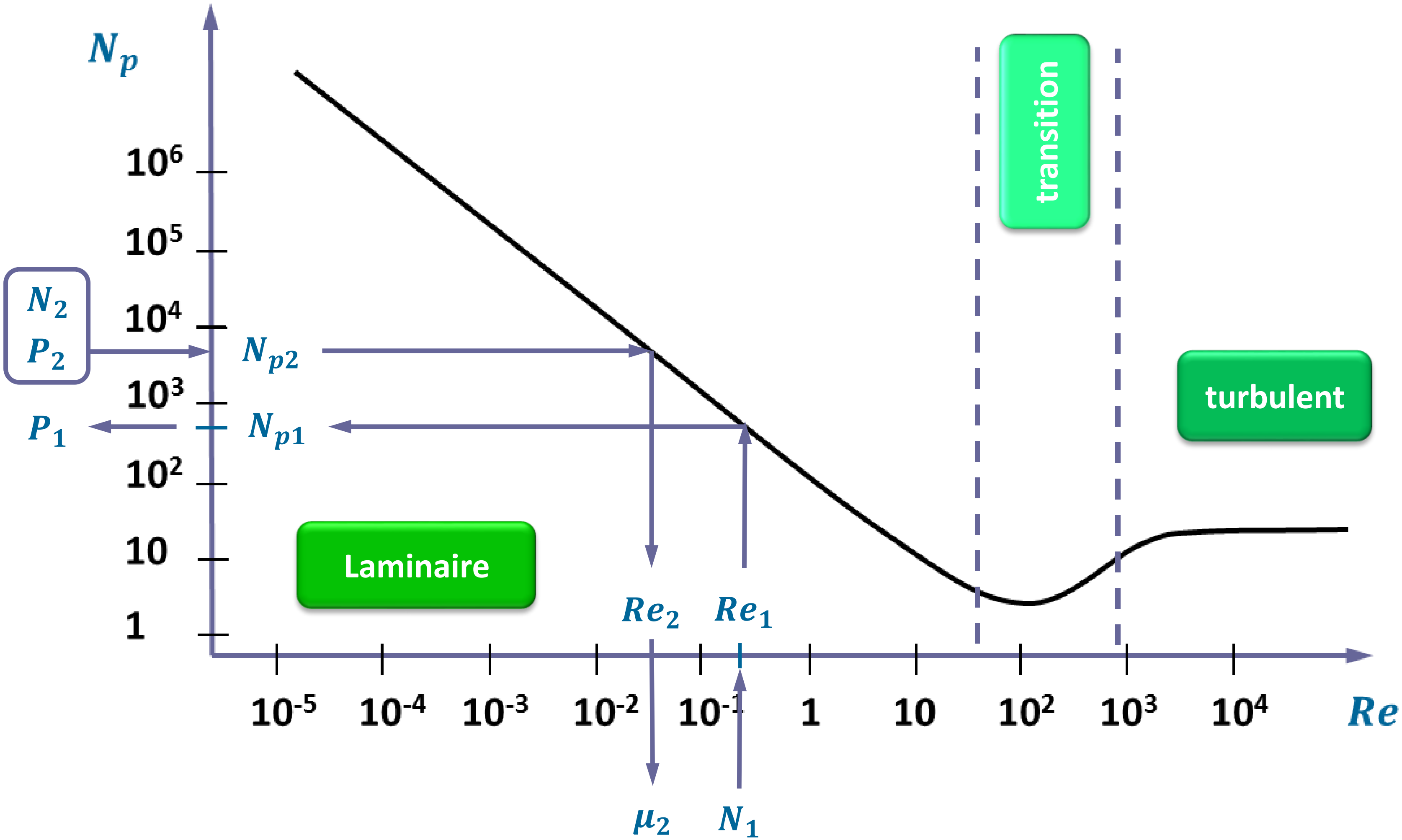
$$N_p = \frac{K_p}{Re}$$

Exposant forcé à 0 ⇨ surface libre du fluide parfaitement plane, effets de gravité négligeables

$$N_p = \frac{205{,}5}{Re} . \left(\frac{T}{d}\right)^{-0{,}96} . \left(\frac{H_L}{d}\right)^{0{,}08} . \left(\frac{C_b}{d}\right)^{-0{,}05}$$



Utilisation de la courbe de puissance



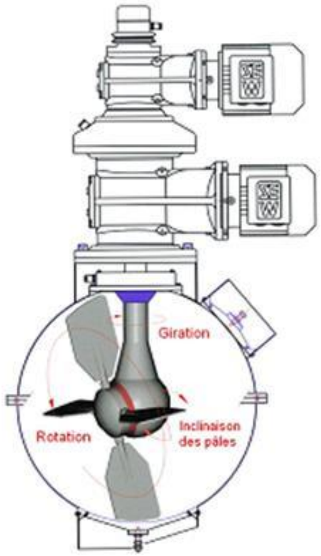
Plan

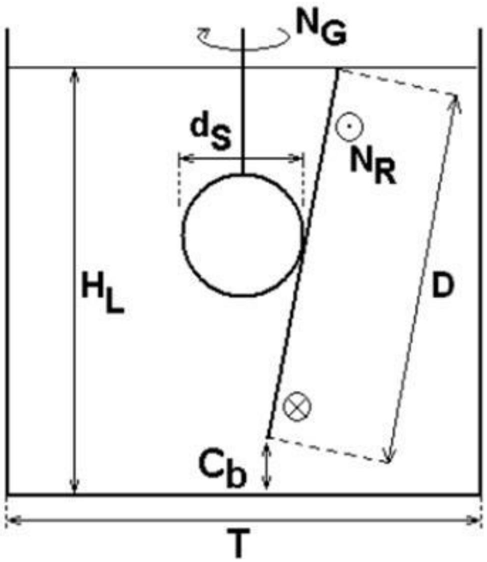
Analyse dimensionnelle de la puissance consommée d'un agitateur plan

Généricité de l'approche - Analyse dimensionnelle d'un mélangeur planétaire et comparaison à un autre agitateur

Caractère transversal de l'approche: performances d'un mélangeur planétaire

❑ Mélangeur planétaire Triaxe®





❑ *Planétaire = combinant plusieurs mouvements*

❑ *Utilisés au niveau industriel pour élaborer et structurer différentes matières alimentaires ⇨ mélange intime de deux constituants miscibles d'une recette, pétrissage, aération d'une mousse, etc.*

Objectif

Caractériser le mélangeur Triaxe (P, t_m) par rapport aux systèmes d'agitation classiques constitués d'un seul mobile verticalement centré dans la cuve et réalisant un mouvement de révolution unique autour de l'axe de rotation

Analyse dimensionnelle de la puissance et du temps de mélange

Liste des grandeurs physiques

↓

Propriétés matériau constantes

↓ oui

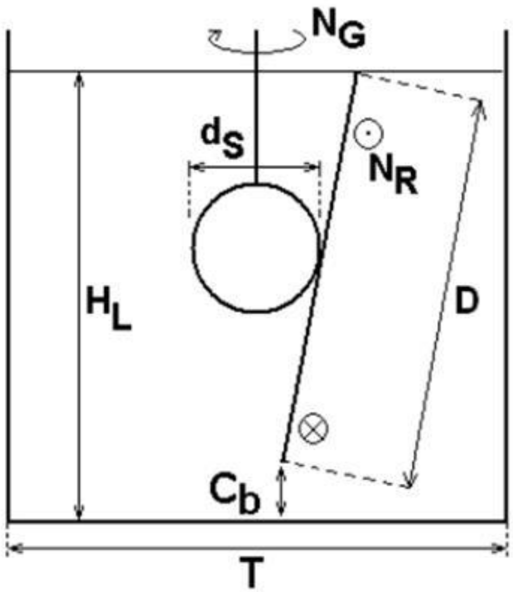
Système d'unités et dimensions

↓

Choix de la base

↓

Etablissement des nombres sans dimension



- **Liste des grandeurs physiques indépendantes**
  - *paramètres matière*
  - *paramètres de procédé*
  - *conditions aux frontières*
  - *constantes universelles*

$$P = f_1\left(T, d_s, D, C_b, H_L, \{p_{géo}\}, \rho, \mu, g, N_R, N_G\right)$$

$$t_m = f_2\left(T, d_s, D, C_b, H_L, \{p_{géo}\}, \rho, \mu, g, N_R, N_G\right)$$

- **Matrice aux dimensions / Base** (ρ, N_G, d_s)

	P	t_m	μ	g	$\{p_{géo}\}$	N_R	D	T	H_L	C_b	ρ	N_G	d_s
M	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
L	2	0	-1	1	1	0	1	1	1	1	-3	0	1
T	-3	1	-1	-2	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0

Analyse dimensionnelle de la puissance et du temps de mélange

❑ Transformation de la matrice aux dimensions (matrice centrale = identité)

	P	t_m	μ	g	$\{p_{géo}\}$	N_R	D	T	H_L	C_b	ρ	N_G	d_s
M	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
-T	3	-1	1	2	0	1	0	0	0	0	0	1	0
L+3M	5	0	2	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1

$$\pi_{cible1} = \frac{P}{\rho . N_G^{\;3} . d_s^{\;5}}$$

Nombre de puissance de giration

$$\pi_3 = \frac{N_G^{\;2} . d_s}{g}$$

$$\pi_5 = \frac{N_R}{N_G}$$

facteurs de forme

$$\pi_i = \frac{V_i}{d_s}$$

$$\pi_2 = \frac{\rho . N_G . d_s^{\;2}}{\mu}$$

Fr de giration

$$\pi_{cible2} = N_G . t_m$$

Nombre de mélange de giration

Re de giration

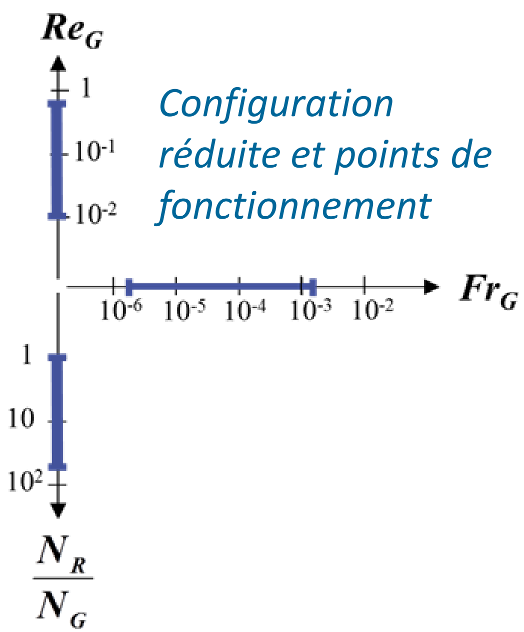
❑ Configuration complète

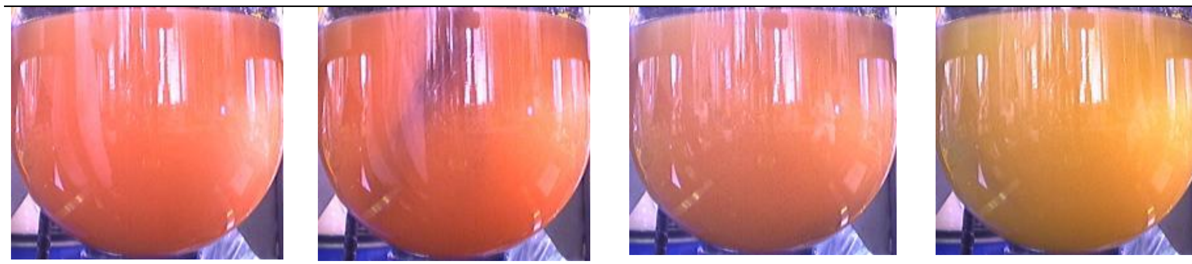
$$N_{P_G} = \frac{P}{\rho . N_G^3 . d_s^5} = F_1\left(Re_G, Fr_G, \frac{N_R}{N_G}, \frac{D}{d_s}, \frac{C_B}{d_s}, \frac{T}{d_s}, \frac{H_L}{d_s}, \{\pi_{géo}\} \right)$$

$$\Theta_G = N_G . t_m = F_2\left(Re_G, Fr_G, \frac{N_R}{N_G}, \frac{D}{d_s}, \frac{C_B}{d_s}, \frac{T}{d_s}, \frac{H_L}{d_s}, \{\pi_{géo}\} \right)$$

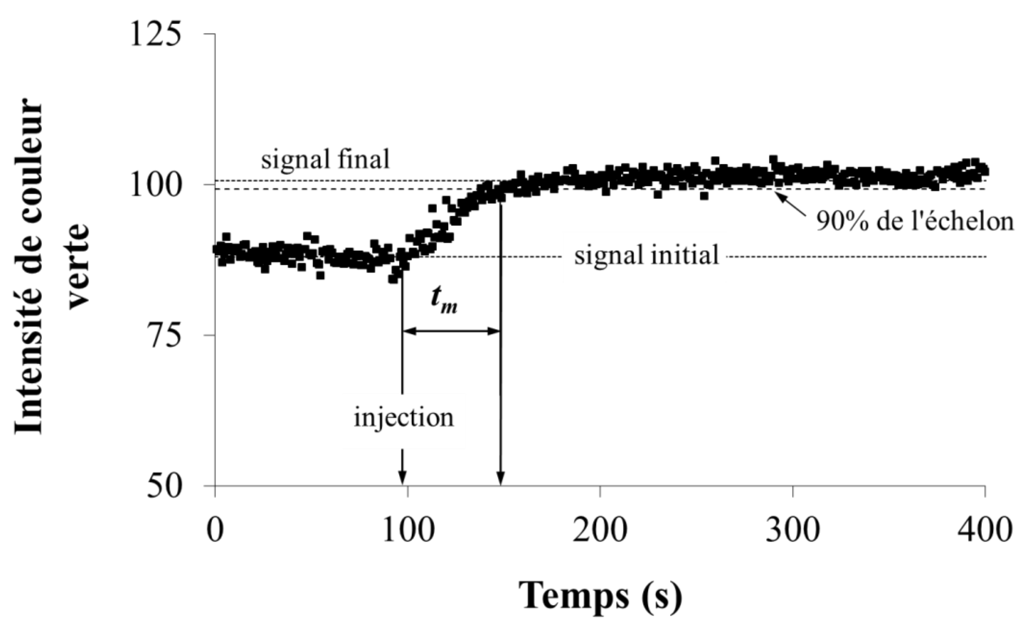
Analyse dimensionnelle de la puissance et du temps de mélange

- **Programme expérimental** ***Delaplace et al. 2004***
  - ***Unique système d'agitation***
  - ***Mesures colorimétriques*** *(réaction acide base avec indicateurs colorés rouge de méthyle / bleu de thymol)* ⇨ t_m





Avant injection du colorant | t=0 injection du colorant | t=24 s après injection processus en cours | Etat final : t=82 s mélange achevé

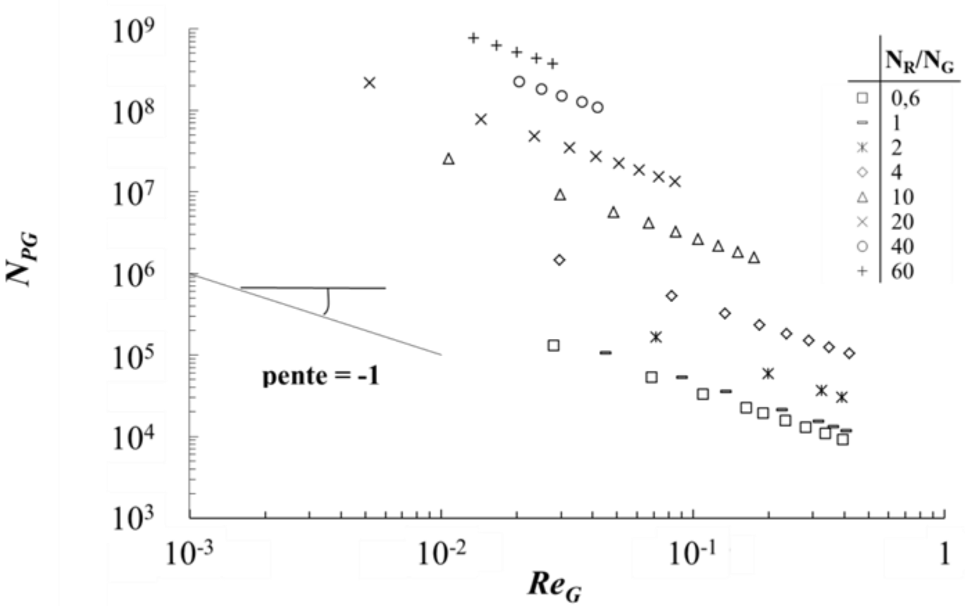


- **Relations de procédé**

$$N_{pG} = F_3(Re_G, Fr_G, \frac{N_R}{N_G})$$

$$\Theta_G = F_3(Re_G, Fr_G, \frac{N_R}{N_G})$$

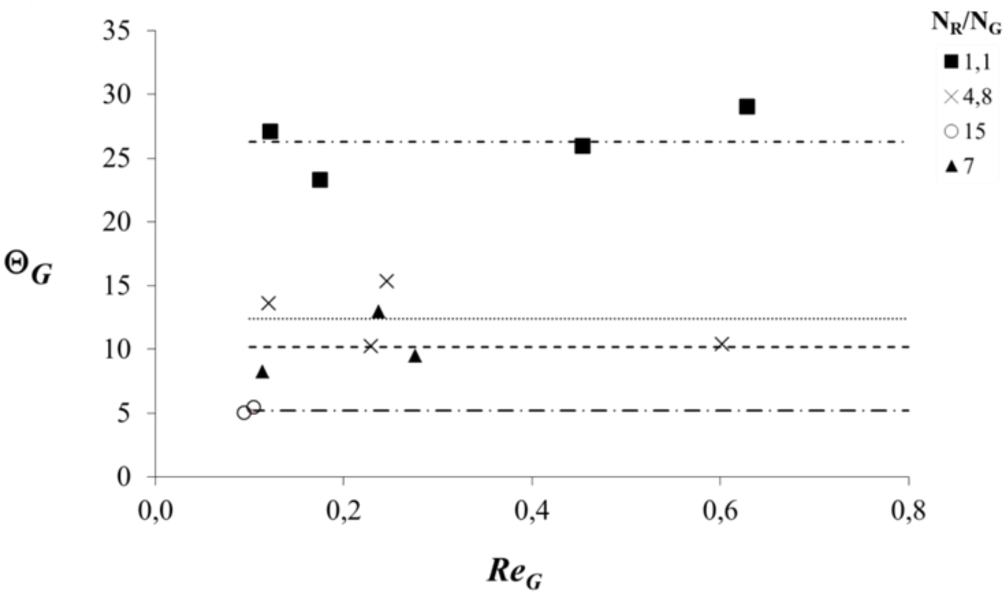
Analyse dimensionnelle de la puissance et du temps de mélange



$$N_{pG} = A.Re_G^{-1}$$

Dépendance de *A* et *B* à la valeur de $\frac{N_R}{N_G}$

Est il possible, à l'image des autres agitateurs, de ramener l'ensemble de ces courbes maîtresses sur une seule courbe maîtresse?



$$\Theta_G = B$$

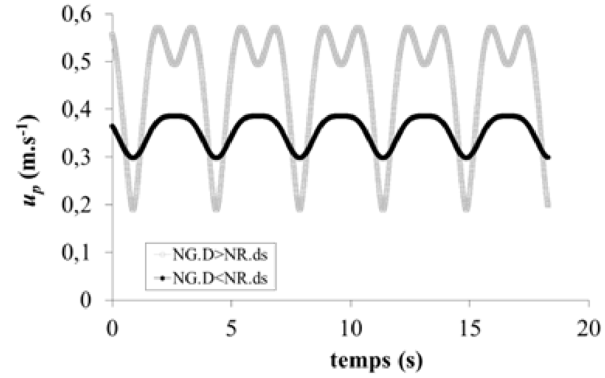
Analyse dimensionnelle de la puissance et du temps de mélange avec introduction d'une variable intermédiaire

Démarche

- Considérer en lieu et place des vitesses N_R et N_G **une seule vitesse caractéristique u_c** dont l'expression analytique intègre la combinaison des deux vitesses de révolution
- u_c (m.s⁻¹) représente la vitesse maximale bout de pâle ⇨ 2 / 4 valeurs extrêmes

$u_c = \sqrt{(N_R^2 + N_G^2).(d_s^2 + D^2)}$ **quand** $N_R.d_s/(N_G.D)$ **< 1**

$u_c = N_R.D + N_G.d_s$ **quand** $N_R.d_s/(N_G.D)$ **≥ 1**



$$P = f_1(T, D, d_s, C_b, H_L, \{p_{géo}\}, \rho, \mu, u_c, g)$$

$$t_m = f_2(T, D, d_s, C_b, H_L, \{p_{géo}\}, \rho, \mu, u_c, g)$$

Matrice aux dimensions / Base (ρ, u_c, d_s)

	P	t_m	μ	g	$\{p_{géo}\}$	D	T	H_L	C_b	ρ	u_c	d_s
M	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
L	2	0	-1	1	1	1	1	1	1	-3	1	1
T	-3	1	-1	-2	0	0	0	0	0	0	-1	0

Analyse dimensionnelle de la puissance et du temps de mélange avec introduction d'une variable intermédiaire

Transformation de la matrice aux dimensions (matrice centrale = identité)

	P	t_m	μ	g	$\{p_{géo}\}$	D	T	H_L	C_b	ρ	u_c	d_s
M	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
-T	3	-1	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0
L+3M+T	2	1	1	-1	1	1	1	1	1	0	0	1

$$N_{Pm} = \frac{P}{\rho . u_c^3 . d_s^2}$$

Nombre de puissance modifié

$$\Theta_m = \frac{u_c . t_m}{d_s}$$

Nombre de mélange modifié

$$\frac{\rho . u_c . d_s}{\mu}$$

Re modifié

$$\frac{u_c}{g . d_s}$$

Fr modifié

facteurs de forme

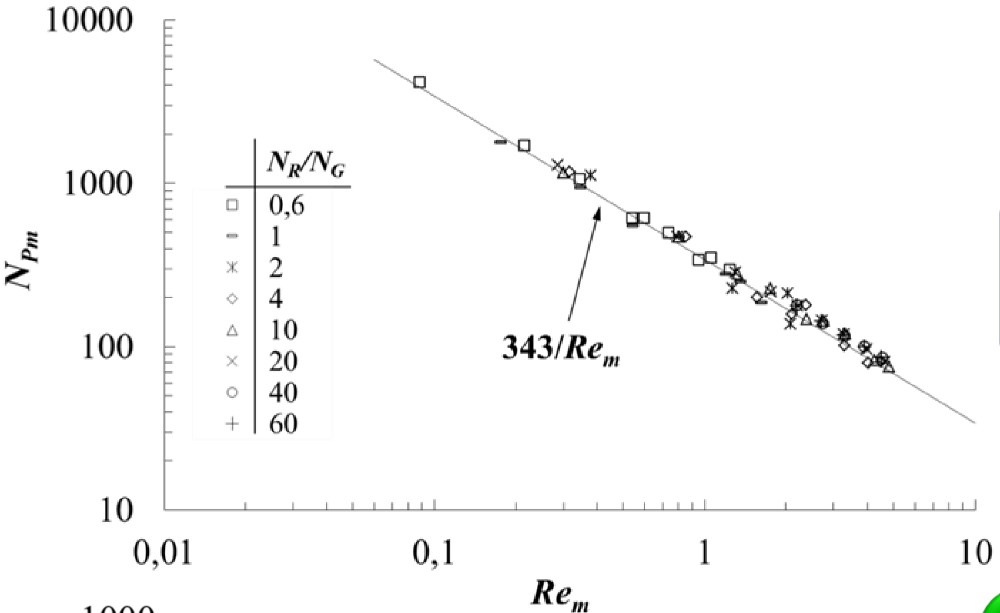
$$\pi_i = \frac{V_i}{d_s}$$

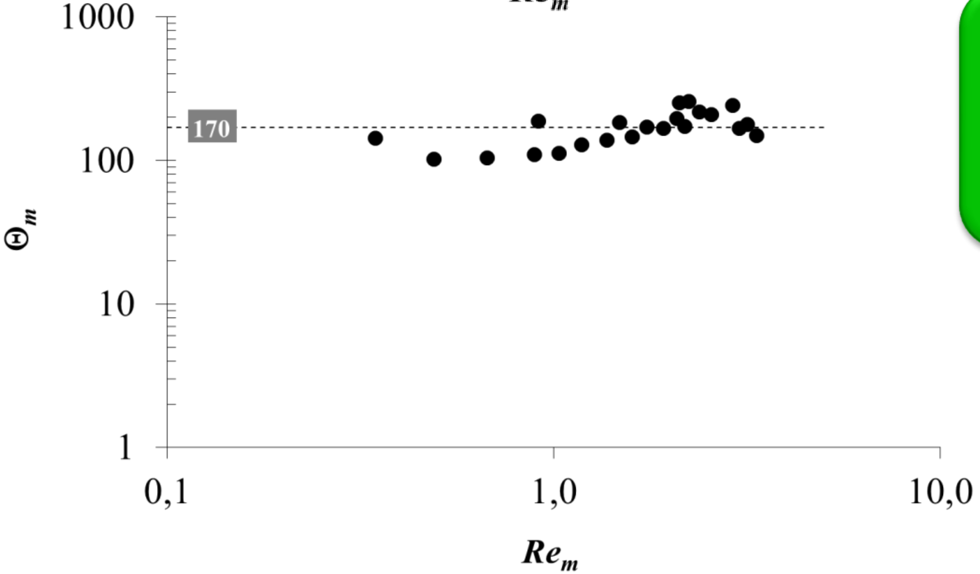
Configuration complète

$$N_{Pm} = F_1\left(Re_m = \frac{\rho . u_c . d_s}{\mu}, Fr_m = \frac{u_c}{g . d_s}, \frac{D}{d_s}, \frac{C_b}{d_s}, \frac{T}{d_s}, \frac{H_L}{d_s}, \{\pi_{géo}\}\right)$$

$$\Theta_m = F_2\left(Re_m, Fr_m, \frac{D}{d_s}, \frac{C_b}{d_s}, \frac{T}{d_s}, \frac{H_L}{d_s}, \{\pi_{géo}\}\right)$$

Analyse dimensionnelle de la puissance et du temps de mélange avec introduction d'une variable intermédiaire





Analyse dimensionnelle permet de considérer l'agitateur classique comme un cas particulier d'un mélangeur planétaire

Cadre pour comparer les performances de mélange d'agitateurs combinant un ou deux mouvements

Conclusions

AD: Cadre conceptuel pour aborder la modélisation de différentes opérations de génie des procédés

Logigramme: Démarche consolidée et générique