Analyse dimensionnelle:

un outil pour conduire des changements d'échelle raisonnés

Guillaume Delaplace, Karine Loubière, Fabrice Ducept, Romain Jeantet

Objectif

- ***Montrer l'intérêt de l'analyse dimensionnelle pour transposer les résultats d'une échelle à une autre, dans le but de :***
  - **Reproduire** à l'échelle industrielle et à l'identique, un procédé étudié à plus petite échelle, sur pilote ou maquette : ***scale up***
  - **Prédire** le comportement d'un procédé à l'échelle industrielle à l'aide d'essais conduits sur un équipement de plus petite taille : ***scale down***
- ***Pour cela, nous proposons :***
  - De décrire le principe de **similitude** et les règles à suivre
  - Au travers d'un exemple : *Procédé d 'émulsification en cuve agitée*

Plan

I.| *Procédé d ’émulsification en cuve agitée*

II.| *Etablissement de la configuration du système*

- *Liste des variables*
- *Matrice aux dimensions*
- *Espace des mesures internes*

III.| *Changement d’échelle*

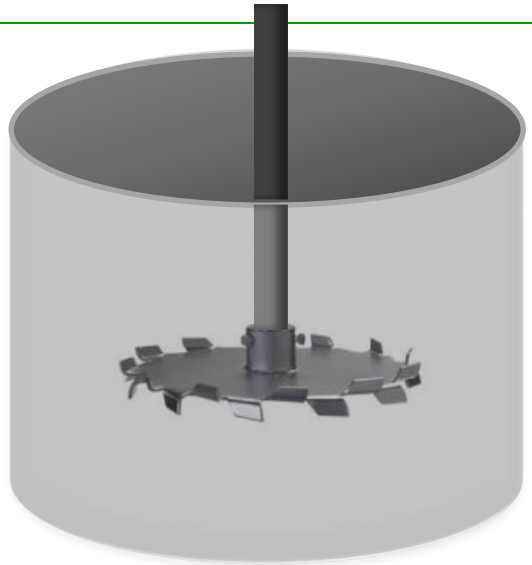
- *Principe de similitude*
- *Règles de similitude*
- *Analyse des choix*

IV.| *Similitude partielle : marche à suivre*

V.| *Conclusion*

I.| *Procédé d ’émulsification en cuve agitée*

Présentation du Procédé



- ***Dispositif :***
  - Cuve à fond plat, sans chicane
  - turbine défloculeuse, verticalement centrée
- ***Produit :***
  - eau + huile, non mélangées au départ
- ***Opération***
  - Dispersion de gouttelettes d’huile au sein de la phase aqueuse

Objectif de l’étude

- ***Mettre au point le procédé sur une maquette de laboratoire***
  - Définir un ou des points de fonctionnement
- ***Reproduire le procédé à l’identique à une échelle industrielle***

scale up

Plan

I.| *Procédé d 'émulsification en cuve agitée*

II.| *Etablissement de la configuration du système*

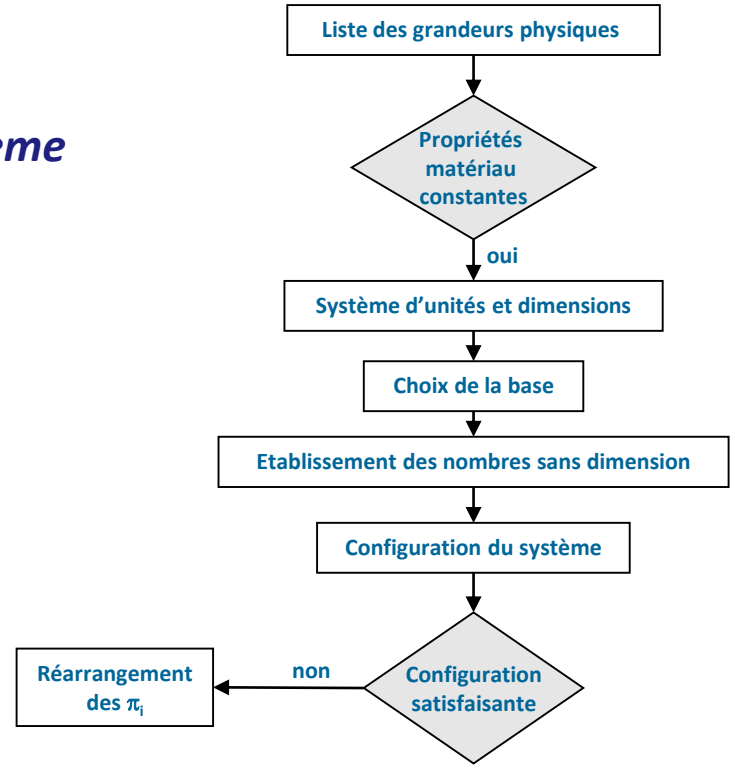
- ***Liste des grandeurs physisques***
- ***Matrice aux dimensions***
- ***Espace des mesures internes***

III.| *Changement d'échelle*

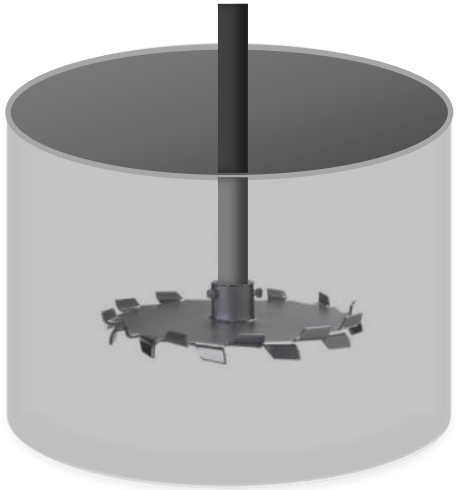
- *Principe de similitude*
- *Règles de similitude*
- *Analyse des choix*

IV.| *Similitude partielle : marche à suivre*

V.| *Conclusion*

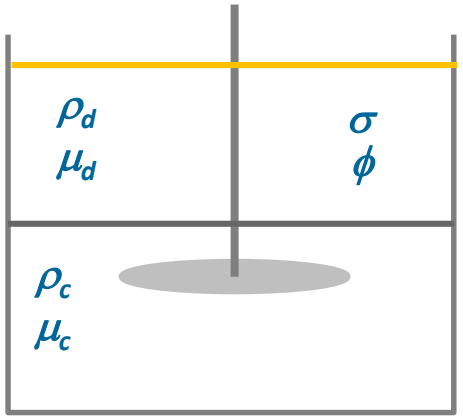


Liste des grandeurs physiques

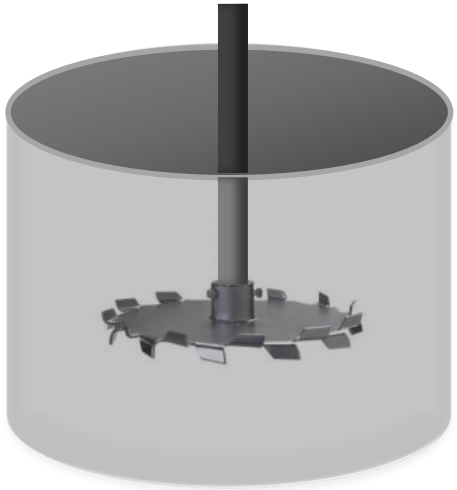


- ***Variable cible :*** diamètre de gouttelettes d_{32}
- ***Paramètres matière*** : phase continue et

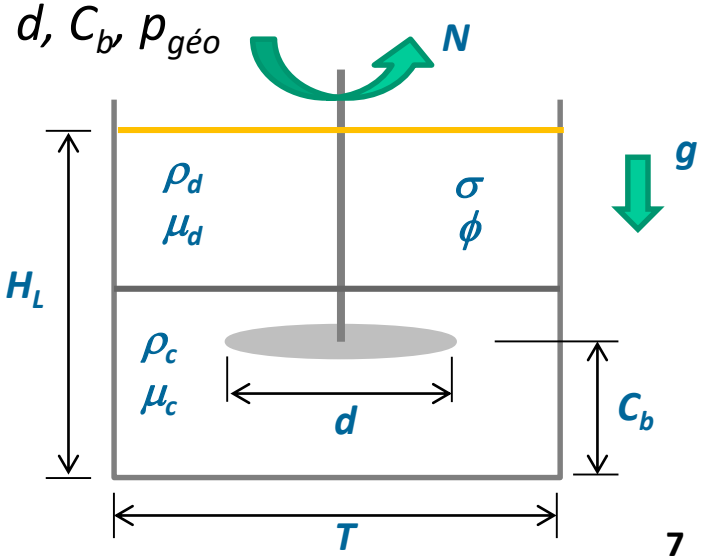
  phase dispersée
  - masses volumiques : ρ_c et ρ_d
  - viscosités : μ_c et μ_d
  - Fraction volumique de phase dispersée : ϕ
  - Tension de surface huile/eau : σ



Liste des grandeurs physiques



- ***Paramètres procédés:***
  - Vitesse de rotation de l'agitateur : *N*
  - durée de l'agitation : *t*
- ***Conditions aux frontières et initiales :***
  - Géométrie de la cuve et de l'agitateur : *T, d,* C_b, $p_{géo}$
  - hauteur de produit dans la cuve : H_L
- ***Constantes universelles :***
  - Accélération de la pesanteur : *g*



Formulation du Problème

$$d_{32} = f\left(\rho_c, \rho_d, \mu_c, \mu_d, \phi, \sigma, N, t, T, H_L, C_b, d, \{p_{géo}\}\right)$$

Matrice aux dimensions

	d_{32}	ρ_c	ρ_d	μ_c	μ_d	ϕ	σ	N	t	T	H_L	C_b	d	$\{p_{géo}\}$	g
M	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
L	1	-3	-3	-1	-1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
T	0	0	0	-1	-1	0	-2	-1	1	0	0	0	0	0	-2

15 variables dimensionnelles – 3 unités fondamentales =

12 nombres sans dimension

Choix de la base des variables répétées $(\boldsymbol{\rho_c, d, N})$

Matrice aux dimensions

❖ ***avec indication des variables répétées***

	d_{32}	ρ_d	μ_c	μ_d	ϕ	σ	t	T	H_L	C_b	$\{p_{géo}\}$	g	$\boldsymbol{\rho_c}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{N}$
M	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
L	1	-3	-1	-1	0	0	0	1	1	1	1	1	-3	1	0
T	0	0	-1	-1	0	-2	1	0	0	0	0	-2	0	0	-1

Choix de la base des variables répétées $(\boldsymbol{\rho_c, d, N})$

Matrice aux dimensions

Matrices résiduelle et centrale

❖ ***avec indication des variables répétées***

	d_{32}	ρ_d	μ_c	μ_d	ϕ	σ	t	T	H_L	C_b	$\{p_{géo}\}$	g	$\boldsymbol{\rho_c}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{N}$
M	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
L	1	-3	-1	-1	0	0	0	1	1	1	1	1	-3	1	0
T	0	0	-1	-1	0	-2	1	0	0	0	0	-2	0	0	-1

Matrice résiduelle R *Matrice centrale C*

Matrice Résiduelle modifiée *Rm*

- ***Rm contient les exposants des variables dimensionnelles pour la construction des mesures internes***
- ***Rm=C^{-1} x R***

	d_{32}	ρ_d	μ_c	μ_d	ϕ	σ	t	T	H_L	C_b	$\{p_{géo}\}$	g	ρ_c	d	N
M	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3M+L	1	0	2	2	0	3	0	1	1	1	1	1	0	1	0
-T	0	0	1	1	0	2	-1	0	0	0	0	2	0	0	1

Matrice résiduelle modifiée Rm

Matrice centrale Modifiée Cm=I

Espace des mesures internes

	d_{32}	ρ_d	μ_c	μ_d	ϕ	σ	t	T	H_L	C_b	$\{p_{géo}\}$	g	ρ_c	d	N
M	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3M+L	1	0	2	2	0	3	0	1	1	1	1	1	0	1	0
-T	0	0	1	1	0	2	-1	0	0	0	0	2	0	0	1

$$\pi_{cible} = \frac{d_{32}}{d} = F_1\left(\begin{array}{c} \pi_2 = \frac{\rho_d}{\rho_c}, \pi_3 = \frac{\mu_c}{\rho_c d^2 N}, \pi_4 = \frac{\mu_d}{\rho_c d^2 N}, \pi_5 = \phi\,, \pi_6 = \frac{\sigma}{\rho_c d^3 N^2}, \\ \pi_7 = N.t, \pi_8 = \frac{T}{d}, \pi_9 = \frac{H_L}{d}, \pi_{10} = \frac{C_b}{d}, \pi_{11} = \frac{g}{dN^2}, \pi_{12} = \{\pi_{géo}\} \end{array}\right)$$

Réarrangement des nombres sans dimension

$$\pi_{cible} = \frac{d_{32}}{d} = F_1\left(\begin{array}{c} \pi_2 = \frac{\rho_d}{\rho_c}, \pi_3 = \frac{\mu_c}{\rho_c d^2 N}, \pi_4 = \frac{\mu_d}{\rho_c d^2 N}, \pi_5 = \phi\ , \pi_6 = \frac{\sigma}{\rho_c d^3 N^2}, \\ \pi_7 = N.t, \pi_8 = \frac{T}{d}, \pi_9 = \frac{H_L}{d}, \pi_{10} = \frac{C_b}{d}, \pi_{11} = \frac{g}{dN^2}, \pi_{12} = \{\pi_{\boldsymbol{géo}}\} \end{array}\right)$$

Réarrangement des nombres sans dimension

$$\pi_{cible} = \frac{d_{32}}{d} = F_1\left(\begin{array}{c} \pi_2 = \frac{\rho_d}{\rho_c}, \pi_3 = \frac{\mu_c}{\rho_c d^2 N}, \pi_4 = \frac{\mu_d}{\rho_c d^2 N}, \pi_5 = \phi\,, \pi_6 = \frac{\sigma}{\rho_c d^3 N^2}, \\ \pi_7 = N.t, \pi_8 = \frac{T}{d}, \pi_9 = \frac{H_L}{d}, \pi_{10} = \frac{C_b}{d}, \pi_{11} = \frac{g}{dN^2}, \pi_{12} = \{\pi_{\boldsymbol{géo}}\} \end{array}\right)$$

$$\pi_{cible} = \frac{d_{32}}{d} = F_2\left(\begin{array}{ccccc} \pi_2 = \frac{\rho_d}{\rho_c}, & {\pi_3}^{-1} = \frac{\rho_c d^2 N}{\mu_c} = \boldsymbol{Re}, & \frac{\pi_4}{\pi_3} = \frac{\mu_d}{\mu_c}, & \pi_5 = \phi\,, \\ & {\pi_6}^{-1} = \frac{\rho_c d^3 N^2}{\sigma} = \boldsymbol{We}, & \pi_7 = N.t, & \\ \pi_8 = \frac{T}{d}, & \pi_9 = \frac{H_L}{d}, & \pi_{10} = \frac{C_b}{d}, & {\pi_{11}}^{-1} = \frac{dN^2}{g} = \boldsymbol{Fr}, & \pi_{12} = \{\pi_{\boldsymbol{géo}}\} \end{array}\right)$$

Réarrangement des nombres sans dimension

$$\pi_{cible} = \frac{d_{32}}{d} = F_1\left(\begin{array}{c} \pi_2 = \frac{\rho_d}{\rho_c}, \pi_3 = \frac{\mu_c}{\rho_c d^2 N}, \pi_4 = \frac{\mu_d}{\rho_c d^2 N}, \pi_5 = \phi\,, \pi_6 = \frac{\sigma}{\rho_c d^3 N^2}, \\ \pi_7 = N.t, \pi_8 = \frac{T}{d}, \pi_9 = \frac{H_L}{d}, \pi_{10} = \frac{C_b}{d}, \pi_{11} = \frac{g}{dN^2}, \pi_{12} = \{\pi_{\boldsymbol{géo}}\} \end{array}\right)$$

$$\pi_{cible} = \frac{d_{32}}{d} = F_2\left(\begin{array}{ccccc} \pi_2 = \frac{\rho_d}{\rho_c}, & {\pi_3}^{-1} = \frac{\rho_c d^2 N}{\mu_c} = \boldsymbol{Re}, & \frac{\pi_4}{\pi_3} = \frac{\mu_d}{\mu_c}, & \pi_5 = \phi\,, \\ & {\pi_6}^{-1} = \frac{\rho_c d^3 N^2}{\sigma} = \boldsymbol{We}, & \pi_7 = N.t, & \\ \pi_8 = \frac{T}{d}, & \pi_9 = \frac{H_L}{d}, & \pi_{10} = \frac{C_b}{d}, & {\pi_{11}}^{-1} = \frac{dN^2}{g} = \boldsymbol{Fr}, & \pi_{12} = \{\pi_{\boldsymbol{géo}}\} \end{array}\right)$$

❖ ***Configuration du système***

$$\frac{d_{32}}{d} = F_2\left(Re, We, Fr, \frac{\rho_d}{\rho_c}, \frac{\mu_d}{\mu_c}, \phi\,, N.t, \frac{T}{d}, \frac{H_L}{d}, \frac{C_b}{d}, \{\pi_{\boldsymbol{géo}}\}\right)$$

Mesures internes : Rapports de forces | matériaux | procédé | géométriques

Plan

I.| *Procédé d ’émulsification en cuve agitée*

II.| *Etablissement de la configuration du système*

- *Liste des grandeurs physiques*
- *Matrice aux dimensions*
- *Espace des mesures internes*

III.| ***Changement d’échelle***

- ***Principe de similitude***
- ***Règles de similitude***
- ***Analyse des choix***

IV.| *Similitude partielle : marche à suivre*

V.| *Conclusion*

Principe de similitude

❖ ***Pour garantir la reproduction à l'échelle industrielle, des mécanismes observés sur maquette :***

- Les configuration des deux systèmes doivent être constituées des mêmes mesures internes
- Toutes les mesures internes doivent avoir des valeurs identiques aux deux échelles : $\pi_{i,\ \text{maquette}} = \pi_{i,\ \text{prototype}}$

⇒ **Similitude complète**

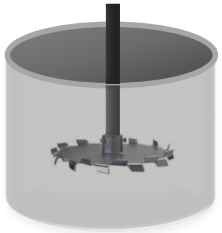
❖ ***Si la valeur numérique d'une mesure interne n'est pas rigoureusement identique aux deux échelles :***

- l'identité de l'évolution de la mesure interne cible π_{cible} aux deux échelles n'est plus garantie

⇒ **Similitude partielle**

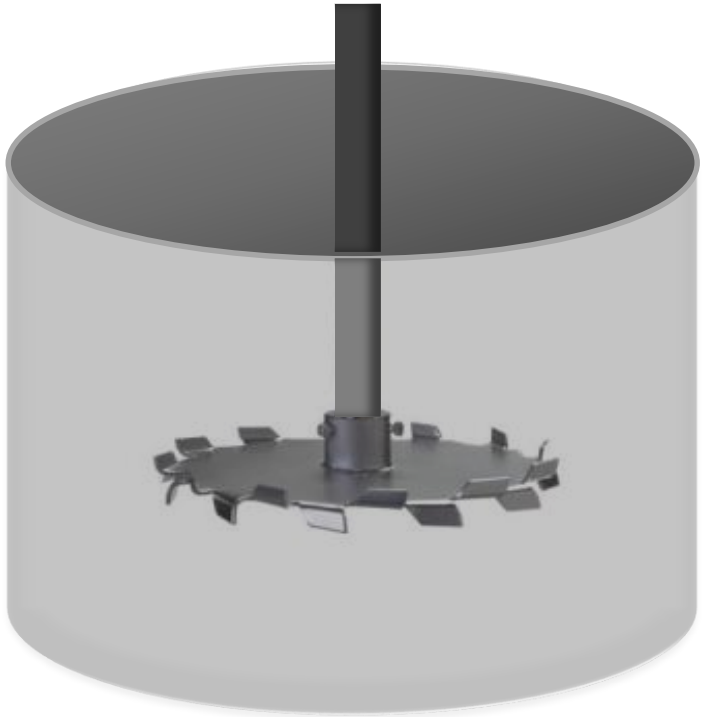
- Nécessité d'évaluer la conséquence de cette similitude non complète sur π_{cible}

Echelle de la maquette

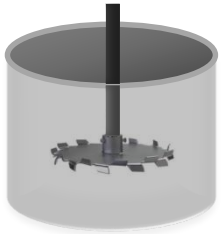


$$\frac{d_{32}}{d} = F_2\left(\begin{matrix} Re, We, Fr, \frac{\rho_d}{\rho_c}, \frac{\mu_d}{\mu_c}, \\ \phi\ , N.t, \frac{T}{d}, \frac{H_L}{d}, \frac{C_b}{d}, \{\pi_{géo}\} \end{matrix}\right)$$

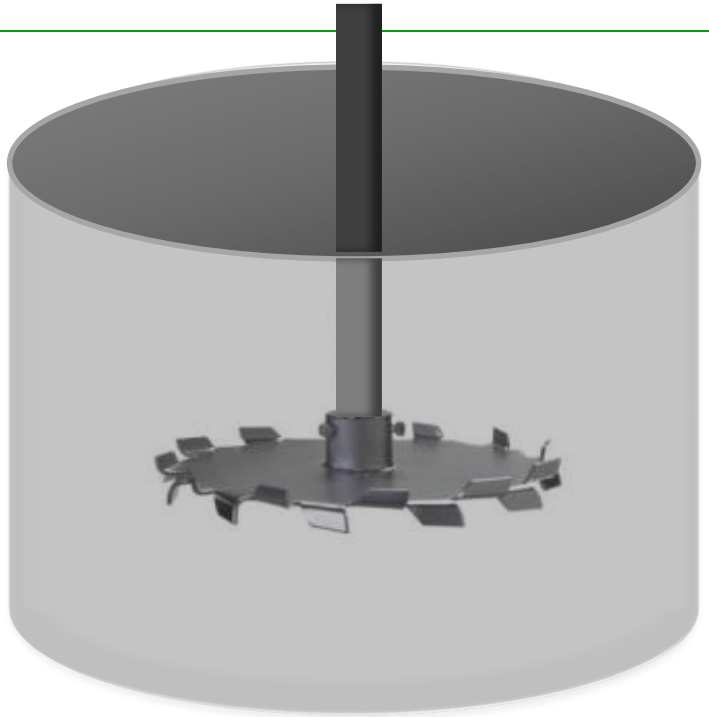
Echelle industrielle : prototype

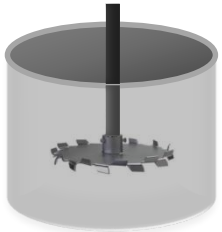


$$\frac{d_{32}}{d} = F_2\left(\begin{matrix} Re, We, Fr, \frac{\rho_d}{\rho_c}, \frac{\mu_d}{\mu_c}, \\ \phi\ , N.t, \frac{T}{d}, \frac{H_L}{d}, \frac{C_b}{d}, \{\pi_{géo}\} \end{matrix}\right)$$

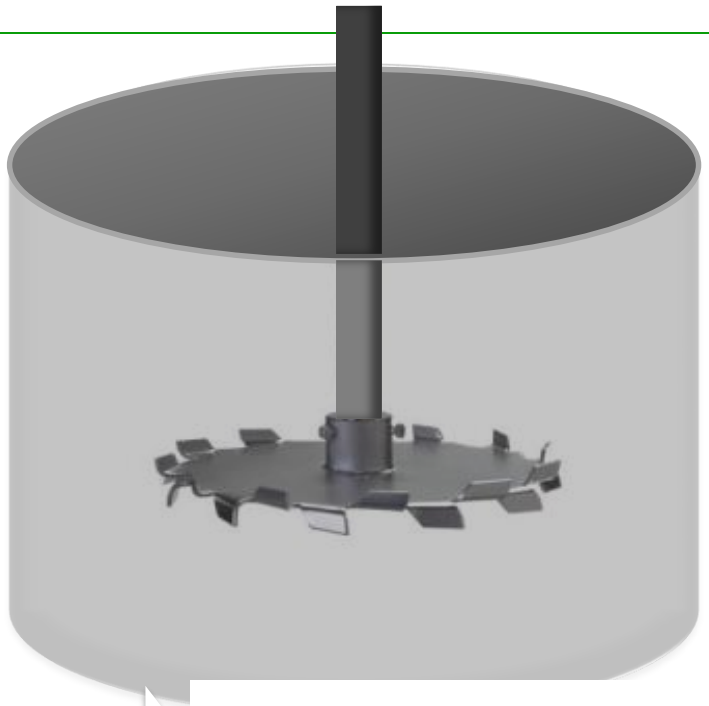


- ***Est-il possible de reproduire sur le prototype industriel un point de fonctionnement obtenu sur la maquette ?***
- ***Peut-on conserver simultanément aux deux échelles les valeurs de toutes les mesures internes ?***





- *Est-il possible de reproduire sur le prototype industriel un point de fonctionnement obtenu sur la maquette ?*
- *Peut-on conserver simultanément aux deux échelles les valeurs de toutes les mesures internes ?*



Similitude complète ?

- *Peut-on avoir tout à la fois :*

?

$Re = Re$ $\quad \frac{\mu_d}{\mu_c} = \frac{\mu_d}{\mu_c} \quad \frac{T}{d} = \frac{T}{d}$

$We = We$ $\quad \frac{H_L}{d} = \frac{H_L}{d}$

$Fr = Fr$ $\quad \frac{\rho_d}{\rho_c} = \frac{\rho_d}{\rho_c}$

$N.t = N.t$ $\quad \phi = \phi \quad \frac{C_b}{d} = \frac{C_b}{d} \quad \{\pi_{géo}\} = \{\pi_{géo}\}$

Hypothèses de travail

- ***Similitude géométrique : maquette similaire géométriquement au prototype***
  - Facteur d'échelle : $F_e = \frac{D}{d} = \frac{0,5}{0,05} = 10$
  - Mêmes géométries :

$$\frac{T}{d} = \frac{T}{d} \qquad \frac{H_L}{d} = \frac{H_L}{d} \qquad \frac{C_b}{d} = \frac{C_b}{d} \qquad \{\pi_{géo}\} = \{\pi_{géo}\}$$

- ***Mêmes ingrédients aux deux échelles***
  - $\rho_c = \rho_c$, $\rho_d = \rho_d$, $\mu_c = \mu_c$, $\mu_d = \mu_d$, $\phi = \phi$, $\sigma = \sigma$
  - Et donc : $\frac{\mu_d}{\mu_c} = \frac{\mu_d}{\mu_c}$ $\qquad \frac{\rho_d}{\rho_c} = \frac{\rho_d}{\rho_c}$

Règles de similitude

Facteur d'échelle : $F_e=10$

❖ ***Afin d'obtenir l'égalité des points de fonctionnement aux deux échelles :***

1. $Re = \frac{\rho_c d^2 N}{\mu_c} = \frac{\rho_c d^2 N}{\mu_c} = Re$
2. $We = \frac{\rho_c d^3 N^2}{\sigma} = \frac{\rho_c d^3 N^2}{\sigma} = We$
3. $Fr = \frac{dN^2}{g} = \frac{dN^2}{g} = Fr$
4. $N.t = N.t$

Règles de similitude

Facteur d'échelle : $F_e=10$

❖ ***Afin d'obtenir l'égalité des points de fonctionnement aux deux échelles :***

1. $Re = \frac{\rho_c d^2 N}{\mu_c} = \frac{\rho_c d^2 N}{\mu_c} = Re$ ⇒ $N = \frac{d^2}{d^2} N = F_e^{-2} N$ ⇒ $N=0{,}01\ N$

2. $We = \frac{\rho_c d^3 N^2}{\sigma} = \frac{\rho_c d^3 N^2}{\sigma} = We$ ⇒ $N = \frac{d^{3/2}}{d^{3/2}} N = F_e^{-3/2} N$ ⇒ $N=0{,}03\ N$

3. $Fr = \frac{dN^2}{g} = \frac{dN^2}{g} = Fr$ ⇒ $N = \frac{d^{1/2}}{d^{1/2}} N = F_e^{-1/2} N$ ⇒ $N=0{,}3\ N$

4. $N.t = N.t$ ⇒ $t = \frac{N}{N} t$

Règles de similitude

Facteur d'échelle : $F_e=10$

❖ ***Afin d'obtenir l'égalité des points de fonctionnement aux deux échelles :***

1. $Re = \frac{\rho_c d^2 N}{\mu_c} = \frac{\rho_c d^2 N}{\mu_c} = Re$ ⇒ $N = \frac{d^2}{d^2} N = F_e^{-2} N$ ⇒ $N=0,01\ N$

2. $We = \frac{\rho_c d^3 N^2}{\sigma} = \frac{\rho_c d^3 N^2}{\sigma} = We$ ⇒ $N = \frac{d^{3/2}}{d^{3/2}} N = F_e^{-3/2} N$ ⇒ $N=0,03\ N$

3. $Fr = \frac{dN^2}{g} = \frac{dN^2}{g} = Fr$ ⇒ $N = \frac{d^{1/2}}{d^{1/2}} N = F_e^{-1/2} N$ ⇒ $N=0,3\ N$

4. $N.t = N.t$ ⇒ $t = \frac{N}{N} t$

❖ ***La similitude complète n'est pas possible*** ⇒ **Similitude partielle**

⇒ ***Impossibilité*** de conserver simultanément les valeurs numériques de ***Re***, ***We*** ou ***Fr*** aux deux échelles

⇒ ***Impossibilité*** de reproduire un même point de fonctionnement aux deux échelles

Analyse des choix

Facteur d'échelle : $F_e=10$

$N=2000$ tr/min

1. $Re=Re$ ⇒ $N = F_e^{-2}\, N=0,01\, N$ ⇒ **$N= 20$ tr/min**

   ⇒ $We = F_e^{-1}\, We=0,1\, We$

   $Fr = F_e^{-3}\, Fr=0,001\, Fr$

2. $We=We$ ⇒ $N = F_e^{-3/2}\, N=0,03\ N$ ⇒ **$N= 63$ tr/min**

   ⇒ $Re = F_e^{1/2}\, Re=3,16\, Re$

   $Fr = F_e^{-2}\, Fr=0,01\, Fr$

3. $Fr=Fr$ ⇒ $N = F_e^{-1/2}\, N=0,3\ N$ ⇒ **$N= 632$ tr/min**

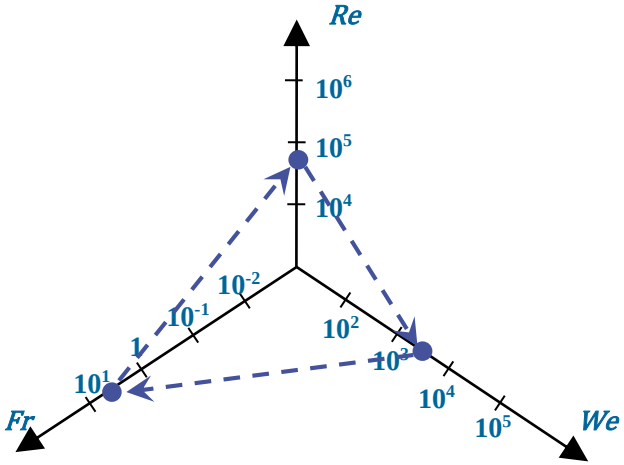
   ⇒ $Re = F_e^{3/2}\, Re=31,6\, Re$

   $We = F_e^{2}\, We=100We$

Représentation graphique de la configuration

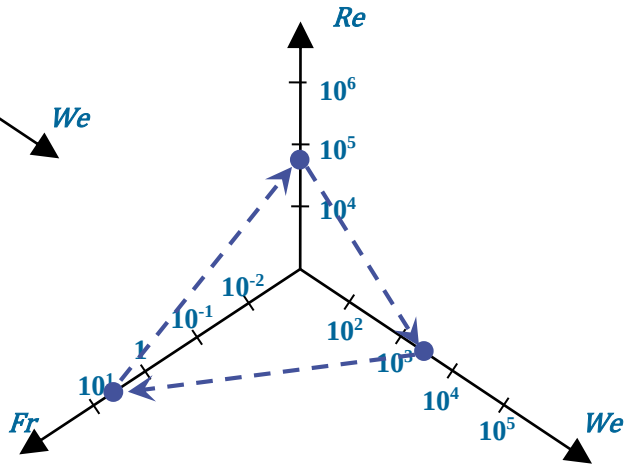
❖ **Pour trois points de fonctionnement**

$Re = Re$



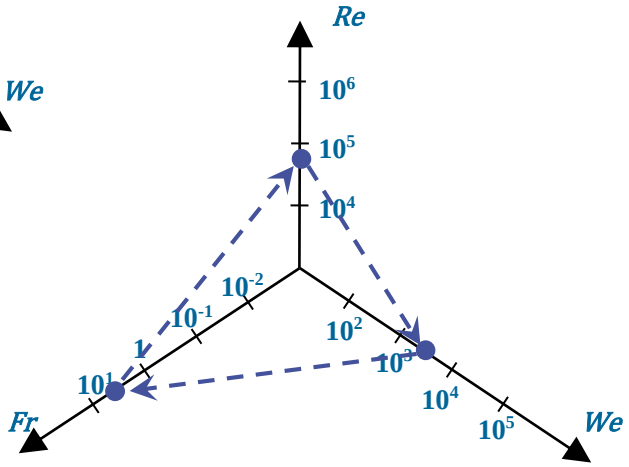
$N = F_e^{-2}$ $N=0,01$ N

$We = We$



$N = F_e^{-3/2}$ $N=0,03$ N

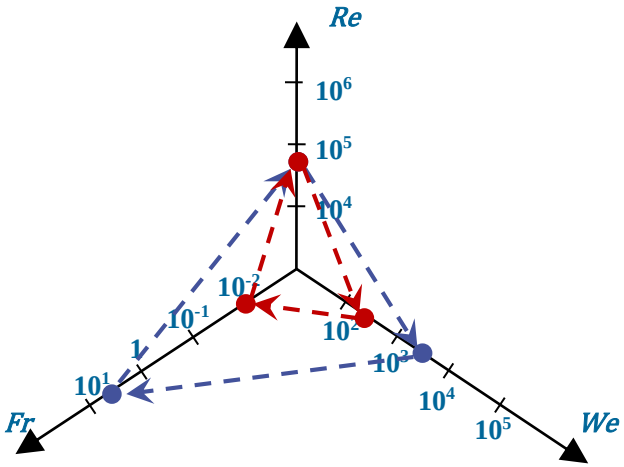
$Fr = Fr$



$N = F_e^{-1/2}$ $N=0,3$ N

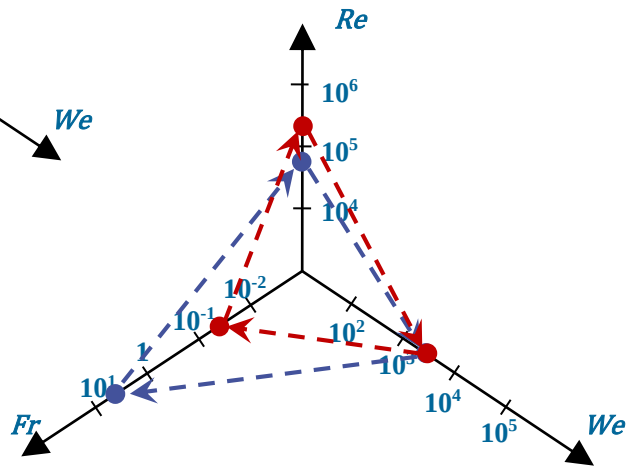
Re=Re

Représentation graphique de la configuration



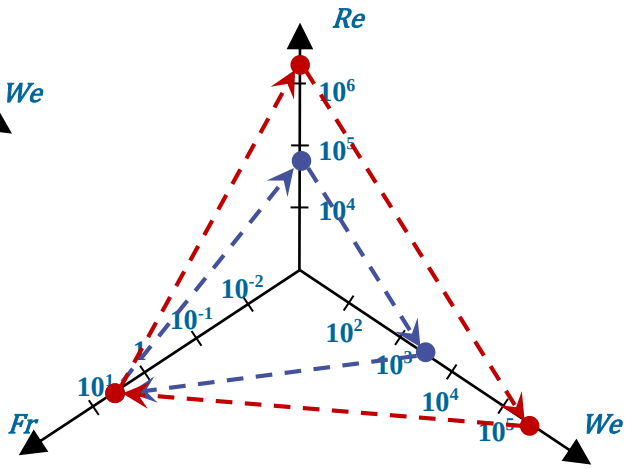
$N = F_e^{-2}$ N=0,01 N

We=We



$N = F_e^{-3/2}$ N=0,03 N

Fr=Fr



$N = F_e^{-1/2}$ N=0,3 N

Comment choisir les conditions opératoires à l'échelle industrielles ?

Plan

I.| *Procédé d ’émulsification en cuve agitée*

II.| *Etablissement de la configuration du système*

- *Liste des grandeurs physiques*
- *Matrice aux dimensions*
- *Espace des mesures internes*

III.| *Changement d’échelle*

- *Principe de similitude*
- *Règles de similitude*
- *Analyse des choix*

IV.| *Similitude partielle : marche à suivre*

V.| *Conclusion*

En cas de similitude complète :

- ***On s'appuie sur la configuration du système***

En cas de similitude partielle :

- ***Toutes les valeurs des mesures internes ne sont pas conservées***
- ***Quelles conditions permettent de reproduire le point de fonctionnement ?***
- ***Quel nombre sans dimension doit-on conserver en priorité ?***

Analyser la relation de procédé

- ***Marche à suivre :***
  - Détermination de la relation de procédé grâce à des expériences menées sur maquette
  - Recherche de corrélations semi empiriques de la littérature

Application au procédé d'émulsification

❖ ***Corrélations semi empiriques de la littérature*** :

- corrélation de Calderbank (1958) pour agitateur à 4 pales

$$\frac{d_{32}}{d} = 0{,}06.(1+\phi).We^{-3/5}$$

- corrélation de Brown et Petit (1970) pour une turbine Rushton à 6 pales :

$$\frac{d_{32}}{d} = 0{,}05.(1+3{,}14.\phi).We^{-3/5}$$

❖ ***On en déduit la forme de la relation procédé*** :

- Avec les paramètres matières et géométriques fixés

$$\frac{d_{32}}{d} = C.We^{-3/5}$$

Ce sont donc les valeurs de We qu'il faudra conserver aux deux échelles pour reproduire les points de fonctionnement

Application au procédé d'émulsification

- ***L'objectif industriel est de maintenir le même diamètre moyen des gouttelettes aux deux échelles :*** $d_{32} = d_{32}$
- ***Les conditions à respecter lors du changement d'échelle sont donc :***
  1. $d_{32} = d.C.We^{-3/5}$
  2. $d_{32} = d.C.We^{-3/5}$, avec c=C
  3. $d_{32} = d_{32}$
- ***On écrit donc :***
  - $\frac{d_{32}}{d_{32}} = 1 = \frac{d.C.We^{-3/5}}{d.C.We^{-3/5}} = \frac{d.(N^2.d^3)^{-3/5}}{d.(N^2.d^3)^{-3/5}}$

    $\Rightarrow \left(\frac{N}{N}\right)^{-6/5} . F_e^{-9/5}.F_e = 1$

    $\Rightarrow N = F_e^{-2/3}.N = 431\ tr/min$ pour N=2000 tr/min

Synthèse des conditions opératoires à l'échelle industrielle

- $N = F_e^{-2/3}.N = 431\ tr/min$
- $T = F_e.T = 10.T$, $d = F_e.d = 10.d$, $C_b = F_e.C_b = 10.C_b$, $H_L = F_e.H_L = 10.H_L$, $w = F_e.w = 10.w$
- $\rho_c = \rho_c$, $\rho_d = \rho_d$, $\mu_c = \mu_c$, $\mu_d = \mu_d$, $\phi = \phi$, $\sigma = \sigma$
- $t = F_e^{2/3}.t = 4{,}7.t$
- $We = F_e^{5/3}.We = 46{,}5.We$
- $Fr = F_e^{-1/3}.Fr = 0{,}5.Fr$
- $Re = F_e^{4/3}.Re = 21{,}5.Re$

les valeurs des mesures internes associés au point de fonctionnement du prototype sont très éloignées de leur valeur obtenue sur maquette

La relation de procédé doit être établie à partir d'essais sur la maquette pour les gammes des mesures internes atteintes avec le prototype, pour valider l'identité des mécanismes

Plan

I.| *Procédé d ’émulsification en cuve agitée*

II.| *Etablissement de la configuration du système*

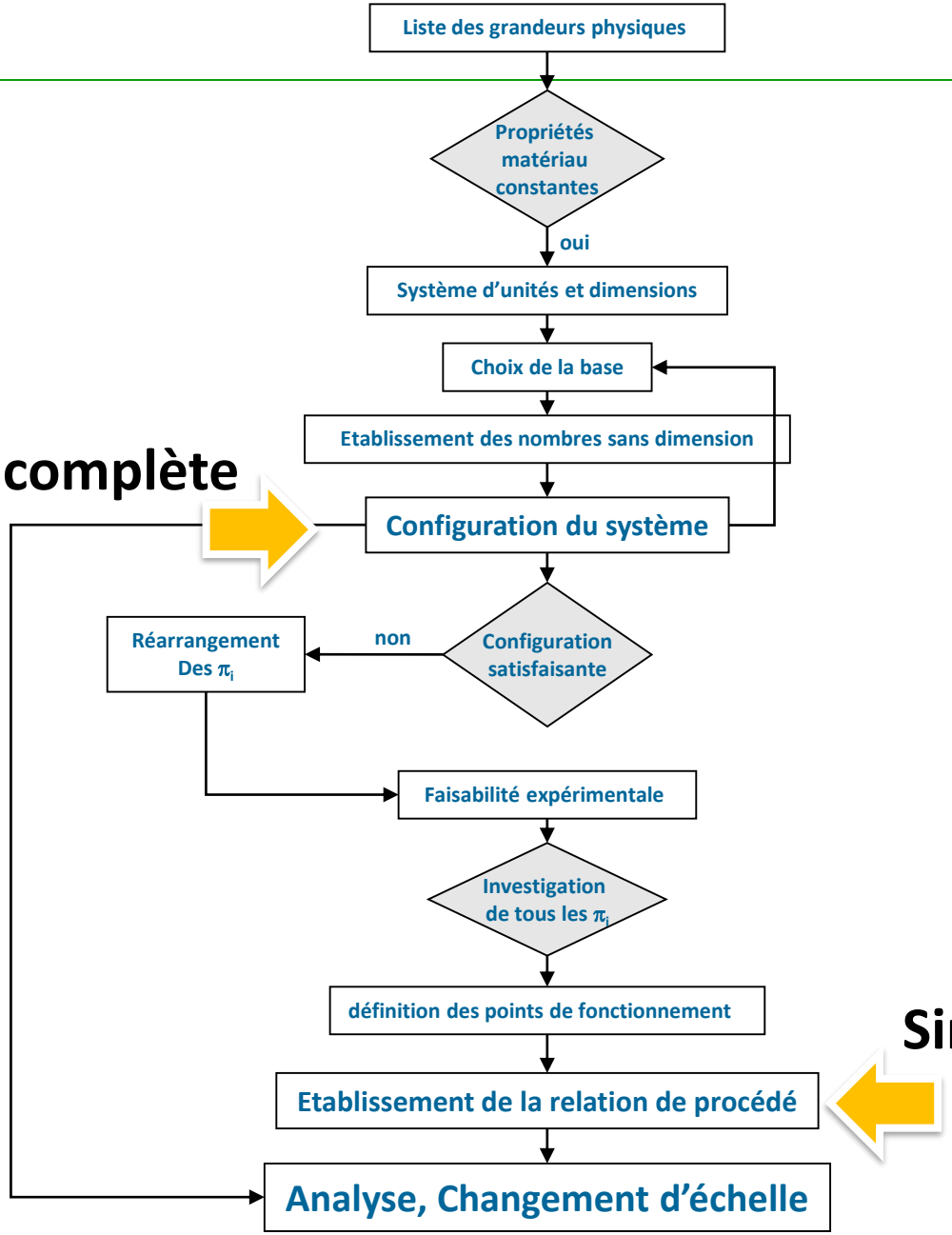
- *Liste des grandeurs physiques*
- *Matrice aux dimensions*
- *Espace des mesures internes*

III.| *Changement d’échelle*

- *Principe de similitude*
- *Règles de similitude*
- *Analyse des choix*

IV.| *Similitude partielle : marche à suivre*

V.| *Conclusion*



Similitude complète

Similitude partielle

- ***L'Analyse Dimensionnelle fixe un cadre rigoureux pour le changement d'échelle***
- ***L'établissement de la configuration du système est une condition nécessaire au changement d'échelle***
- ***En cas de similitude partielle***
  - L'établissement des nombres adimensionnels et la représentation graphique associée permettent de :
    - Comparer les différents points de fonctionnement et les conséquences sur la variable cible
    - Cerner la contribution de chaque mesure interne à l'évolution physique du système
  - Seule la relation de procédé permet de quantifier l'influence spécifique de chaque mesure interne