

Analyse dimensionnelle:

***Extension de la méthode aux
procédés mettant en œuvre un fluide
dont une propriété physique n'est pas
constante au sein du réacteur***

Guillaume Delaplace, Karine Loubière, Fabrice Ducept, Romain Jeantet

Plan

I. | Introduction: Position du problème et Objectifs

II. | Les étapes de la démarche :

- 1** *Fonction matériau,*
- 2** *Méthode d'adimensionalisation standard*
- 3** *Configuration matériau*

III. | Cas d'étude :

Analyse dimensionnelle du transfert de matière gaz-liquide dans une cuve mécaniquement agitée contenant des fluides pseudoplastiques

IV. | Conclusion

I. | INTRODUCTION : Position du Problème

- ❖ La plupart des procédés mettent en jeu de la matière dans le but de la transformer
- ❖ **Une ou plusieurs propriété(s) physique(s) de la matière évoluent** alors entre l'entrée et la sortie de l'équipement
 - *Cause*: Dépendance à certains champs de potentiels $(T, \dot{\gamma})$



Cette dépendance affecte le déroulement du procédé

Exemples

- Fluides thermo-dépendant : $\mu(T)$ [transfert de chaleur]
- Fluides non newtoniens : $\mu(\dot{\gamma})$ [champ de vitesse, mélange]

I. | INTRODUCTION : Position du Problème

 La **modélisation des procédés** passe donc par la **prise en compte de la non-constance des propriétés physiques de la matière** et par la **compréhension de l' influence de cette fonction sur le procédé**

... et d'autant plus dans une perspective de **changement d'échelle**

- **Identité du point de fonctionnement** entre échelles labo et industrielle
- Similitude complète, y compris la **similitude matériau**

I. | INTRODUCTION : Position du Problème

❖ 2 situations concrètes

Une relation de procédé a été établie en considérant constantes les propriétés physiques du produit utilisé :

➡ ***Peut-on étendre de manière raisonnée cette relation à une autre échelle ou avec un autre produit ? Si oui, quelles sont les limites de cette extension ?***

En vue de comprendre la faisabilité d'un procédé thermique à haute température (échelle 1/1) faisant intervenir un produit dont une propriété varie avec la température, des expériences dans une maquette à température ambiante (échelle 1/Fe) peuvent être envisagées :

➡ ***Quels produits modèles et/ou gammes de température faut-il alors choisir dans la maquette à température ambiante ?***

I. | INTRODUCTION : Position du Problème

L'Analyse Dimensionnelle est un outil efficace pour répondre à ces questions

- Méthode développée dans le cas de propriétés physiques constantes
- *Son extension* aux propriétés physiques non constantes peu connue [Pawlowski, 1991]

  La plupart des études considèrent les propriétés constantes dans leur AD

... une exception en transfert de chaleur : **nombre de viscosité** $Vi = \frac{\mu_{bulk}}{\mu_{paroi}}$

$$Nu = 1.86. \left(Re. Pr. \frac{D}{L} \right)^{0.33} Vi^{0.14}$$

Corrélation de Sieder and Tate (1936)
[convection forcée dans une conduite en régime laminaire]

En présence d'une **propriété physique non constante**

- A.D. telle que présentée plus directement applicable
- la propriété s du matériau n'est plus constante mais varie avec la variable p : $s(p) =$ **fonction matériau**



Nécessité de faire évoluer le cadre théorique de la théorie de similitude

Conséquences importantes $\begin{cases} \rightarrow \text{Jeu de nombres sans dimension} \nearrow \nearrow \\ \rightarrow \text{Modification de la relation de procédé} \end{cases}$

Plan

I. | *Introduction: Position du problème et Objectifs*

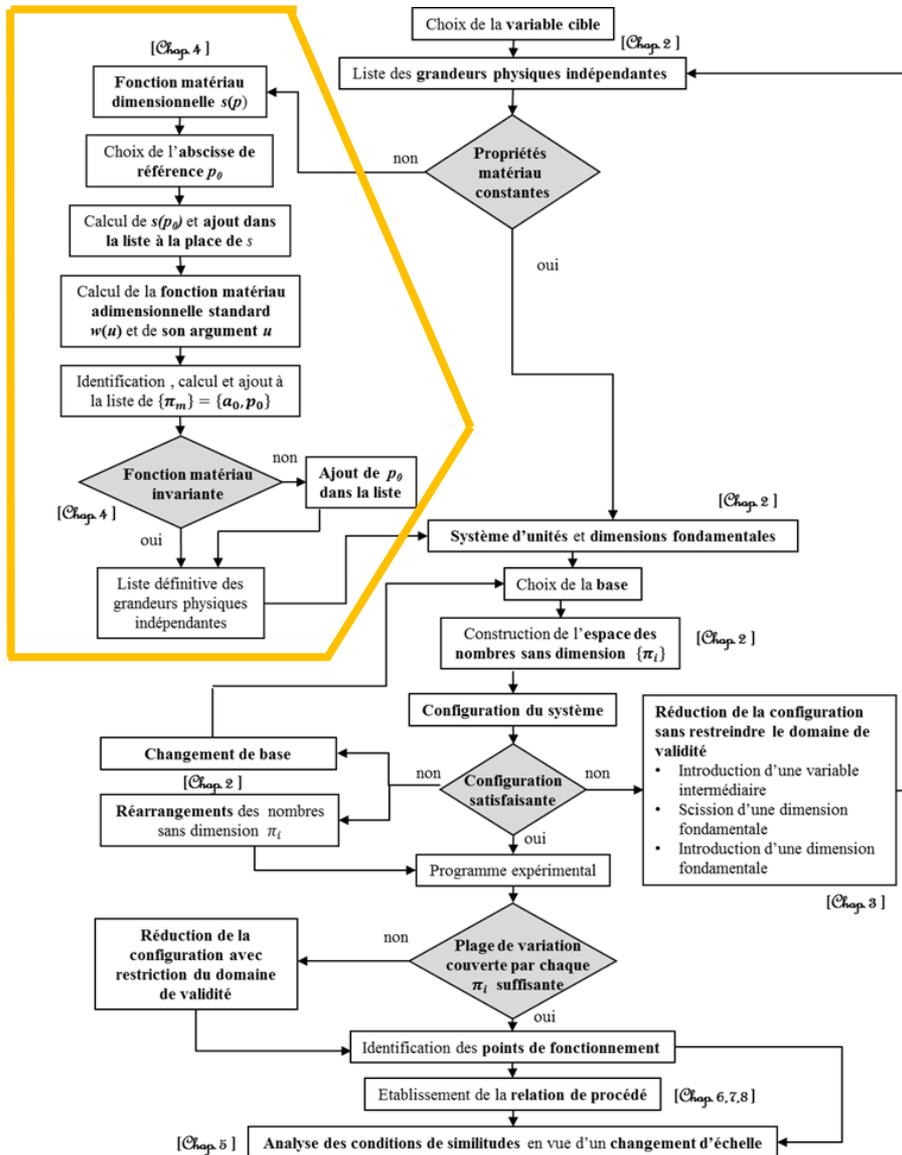
II. | *Les étapes de la démarche :*

- 1 *Fonction matériau,*
- 2 *Méthode d'adimensionalisation standard*
- 3 *Configuration matériau*

III. | *Cas d'étude :*

Analyse dimensionnelle du transfert de matière gaz-liquide dans une cuve mécaniquement agitée contenant des fluides pseudoplastiques

IV. | *Conclusion*



1

Point de départ :
fonction matériau $s(p)$

2

Adimensionalisation de la
fonction matériau
par la méthode standard

3

Construction de la
configuration matériau

II. | Phase 1 : définition de la FONCTION MATERIAU

Fonction matériau *dimensionnelle*

$$s(p) : p \rightarrow s(p)$$

s : propriété physique non constante
 p : variable dont dépend la propriété s

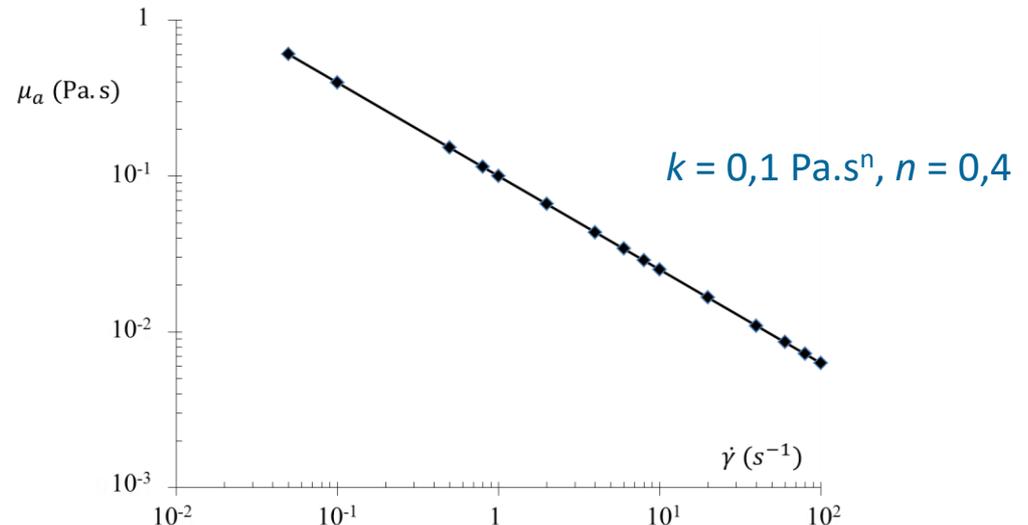
- **FLUIDE NON-NEWTONIEN :** $s(p) = \mu_a(\dot{\gamma})$ viscosité apparente vs. taux de cisaillement

Fluide rhéofluidifiant

$$\mu_a(\dot{\gamma}) = k \cdot \dot{\gamma}^{n-1}$$

k : consistance

n : indice d'écoulement



II. | Phase 1 : définition de la FONCTION MATERIAU

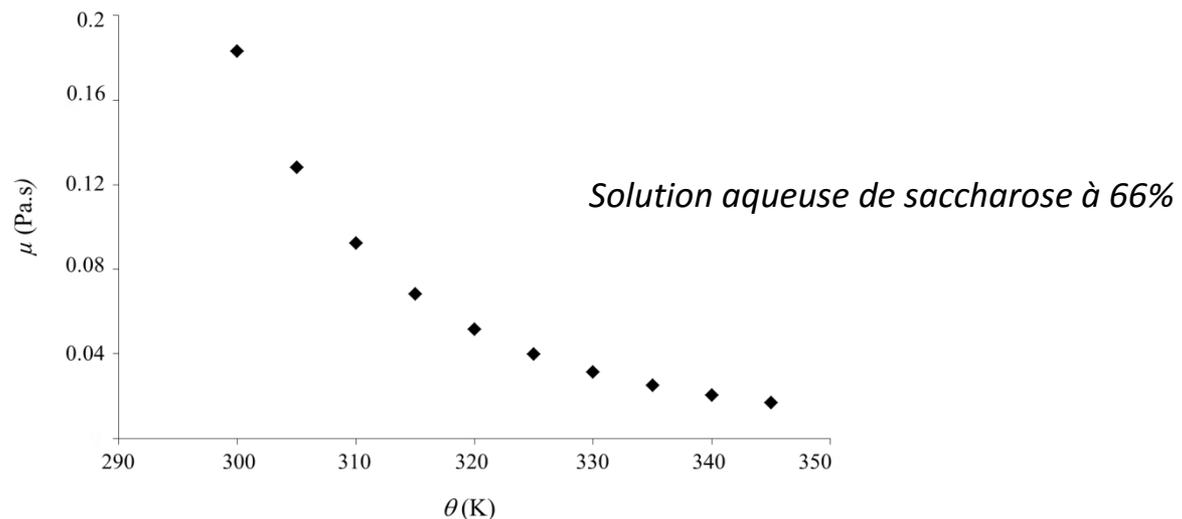
Fonction matériau *dimensionnelle*

$$s(p) : p \rightarrow s(p)$$

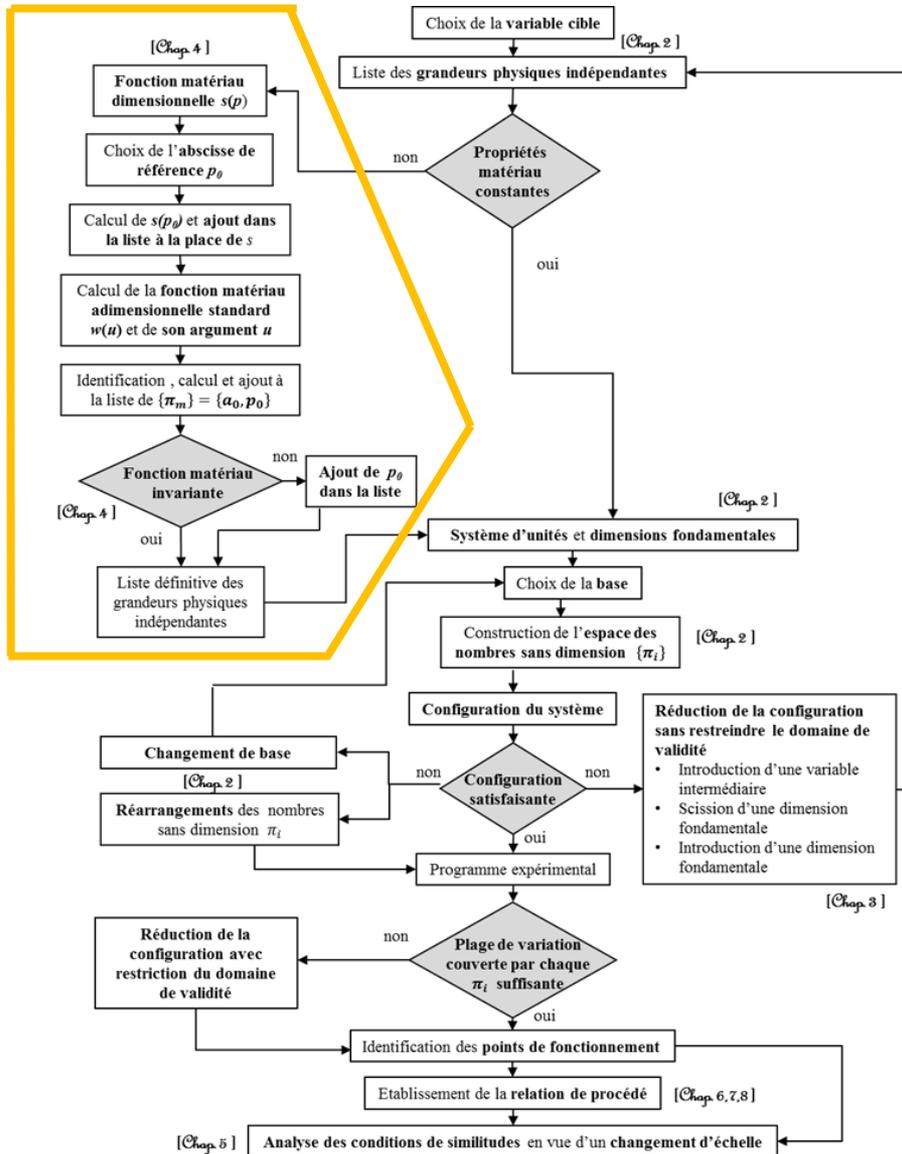
s : propriété physique non constante

p : variable dont dépend la propriété s

- **FLUIDE THERMO-DEPENDANT :** $s(p) = \mu(\theta)$ Viscosité vs. Température



II. | Phase 2 : Adimensionalisation de la FONCTION MATERIAU



1

Point de départ :
fonction matériau $s(p)$

2

Adimensionalisation de la
fonction matériau
par la méthode standard

3

Construction de la
configuration matériau

II. | Phase 2 : Adimensionalisation de la FONCTION MATERIAU

Rappel : La **relation de procédé** est la fonction implicite F qui relie le nombre sans dimension cible, π_{cible} , aux autres nombres sans dimension $\{\pi_i\}$

*En présence d'un matériau ayant une propriété physique non constante ,
il peut être démontré que :*

la relation de procédé ne dépend pas de la fonction matériau dimensionnelle, mais **dépend uniquement**

- de la **fonction matériau adimensionnelle**
- de **l'abscisse de référence p_0**

II. | Phase 2 : Adimensionalisation de la FONCTION MATERIAU

Quelles méthodes d'adimensionalisation de la fonction matériau ?

Il existe plusieurs méthodes, mais toutes ne sont pas conformes aux principes de la théorie de similitude !



Fonction matériau *adimensionnelle standard* [FMAS]

Pour $s(p_0) \neq 0$ et $\left(\frac{d s(p)}{d p}\right)_{p=p_0} \neq 0$

$$w(u) : u \rightarrow w(u) = \frac{s(p)}{s(p_0)}$$

u : argument ; p_0 : abscisse de référence

$$u = a_0(p - p_0)$$

$$a_0 = \frac{1}{s(p_0)} \left(\frac{d s(p)}{d p} \right)_{p=p_0}$$

Conséquence : en $u = 0$, $w(0) = w'(0) = 1$

II. | Phase 2 : Adimensionalisation de la FONCTION MATERIAU

INTÉRÊTS

Fonction matériau adimensionnelle standard

$$w(u) = \frac{s(p)}{s(p_0)} \quad u = a_0(p - p_0) \quad a_0 = \frac{1}{s(p_0)} \left(\frac{d s(p)}{d p} \right)_{p=p_0}$$

- Être conforme aux principes de la théorie de similitude
- Définir une *procédure répétable et applicable* $\forall s(p)$

- $w(u)$ n'a de sens qu'au voisinage de l'abscisse de référence (en $u = 0$)
[origine : développement en série de Taylor]
- $w(u)$ reste dépendante de l'abscisse de référence



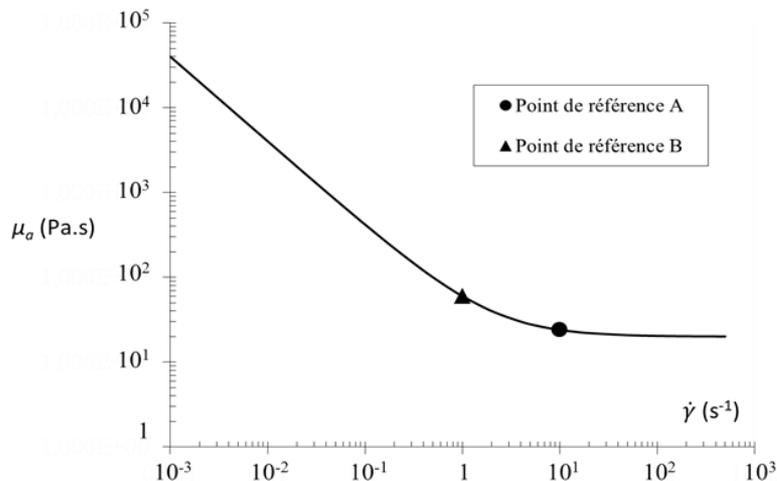
II. | Phase 2 : Adimensionalisation de la FONCTION MATERIAU

EXEMPLE

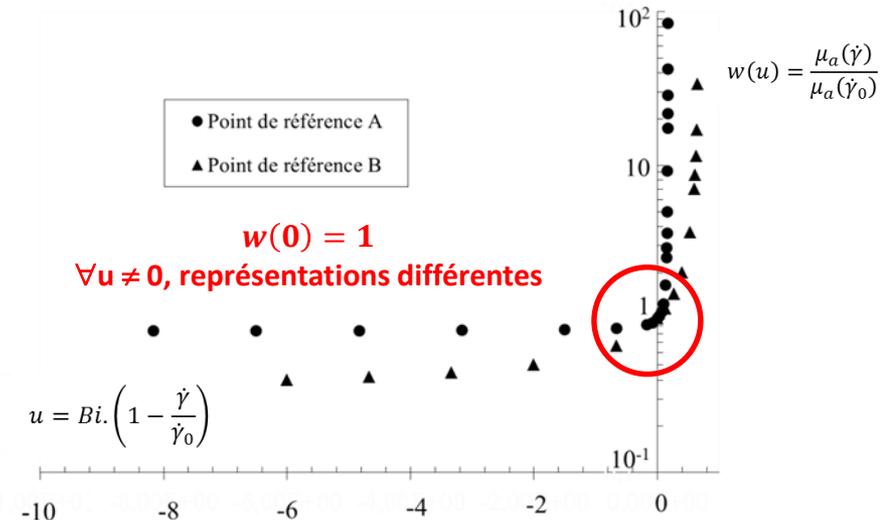
FLUIDE DE BINGHAM : $\mu_a(\dot{\gamma}) = \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} + \mu_p$ τ_y : contrainte seuil [Pa]
 μ_p : viscosité plastique lorsque $\tau > \tau_y$

On montre que $u = Bi. \left(1 - \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0}\right)$ $w(u) = \frac{\mu_a(\dot{\gamma})}{\mu_a(\dot{\gamma}_0)} = 1 + \frac{u}{1 - \frac{u}{Bi}}$ avec $Bi = \frac{\tau_y}{\mu_0 \cdot \dot{\gamma}_0}$

Fonction dimensionnelle



Fonction adimensionnelle standard [FMAS]



[$\tau_y = 40$ Pa ; $\mu_p = 20$ Pa.s. A et B tels que $\dot{\gamma}_0 = 10$ s⁻¹ et $\dot{\gamma}_0 = 1$ s⁻¹]

CAS PARTICULIER

Fonction matériau *adimensionnelle standard* INVARIANTE [FMASI]

- *Ne dépend pas de l'abscisse de référence*
- Formes mathématiques *spécifiques*

$$\phi(u) = (1 + \beta \cdot u)^{1/\beta}$$

$$\phi(u) = \exp(u)$$

ou

$$s(p) = (A + B \cdot p)^C$$

$$s(p) = \exp(A + B \cdot p)$$

II. | Phase 2 : Adimensionalisation de la FONCTION MATERIAU

CAS PARTICULIER

Fonction matériau *adimensionnelle standard invariante*

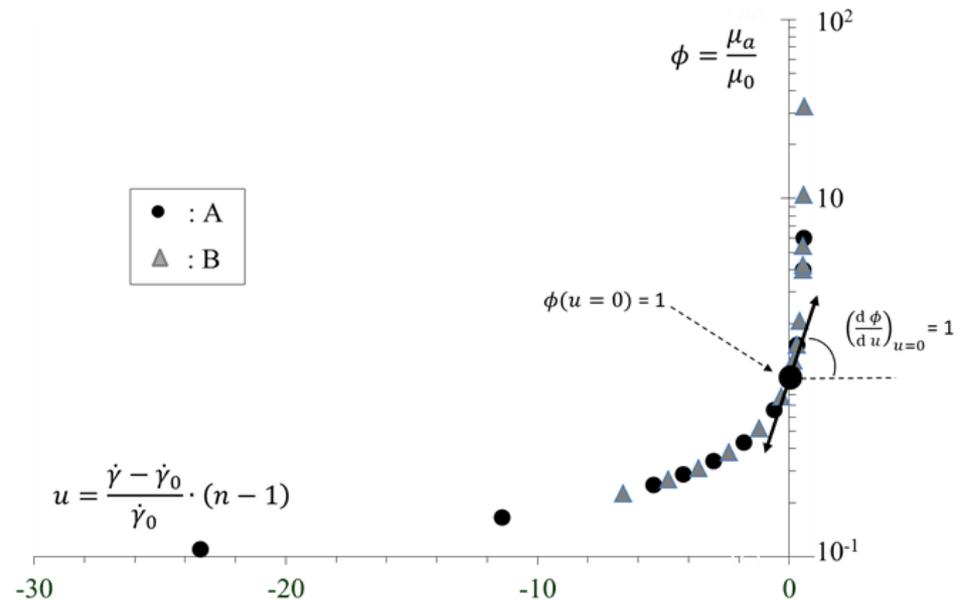
FLUIDE PSEUDOPLASTIQUE $\mu_a(\dot{\gamma}) = k \cdot \dot{\gamma}^{n-1}$

On montre que :

$$w(u) = \phi(u) = (1 + \beta u)^{1/\beta}$$

$$\text{avec } \beta = \frac{1}{n-1}$$

∇p_0 et ∇u ,
les courbes se superposent



Représentation de la fonction matériau adimensionnelle standard d'un fluide pseudoplastique ($k = 0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s}^n$, $n = 0,4$), A et B tels que abscisse 1 s^{-1} et 10 s^{-1} .

SIMILITUDE MATÉRIAU

Deux matériaux sont similaires s'ils peuvent être représentés par une *seule et unique* fonction matériau adimensionnelle standard, et ce quelle que soit l'allure de leurs fonctions matériau dimensionnelles.

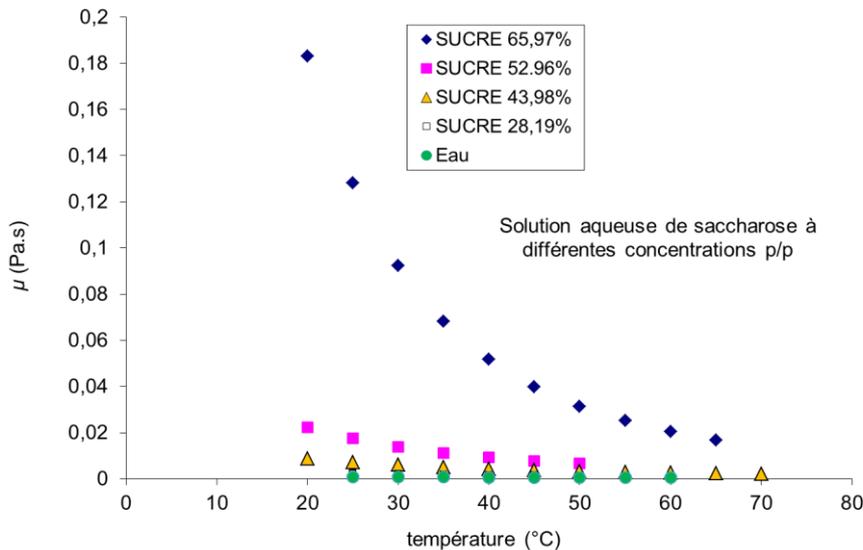
$$w = idem$$

II. | Phase 2 : Adimensionalisation de la FONCTION MATERIAU

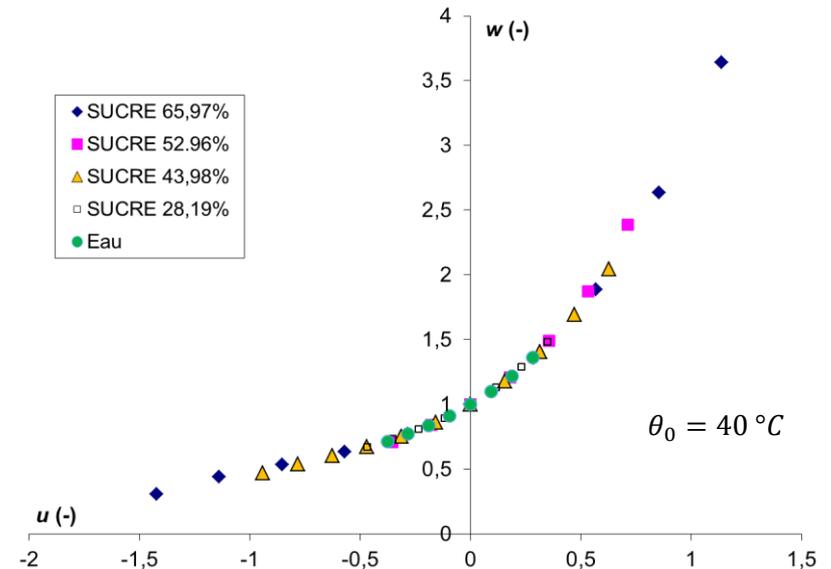
SIMILITUDE MATÉRIAU

Illustration : Solutions aqueuses de saccharose

Fonction matériau *dimensionnelle*
 $\mu(\theta)$

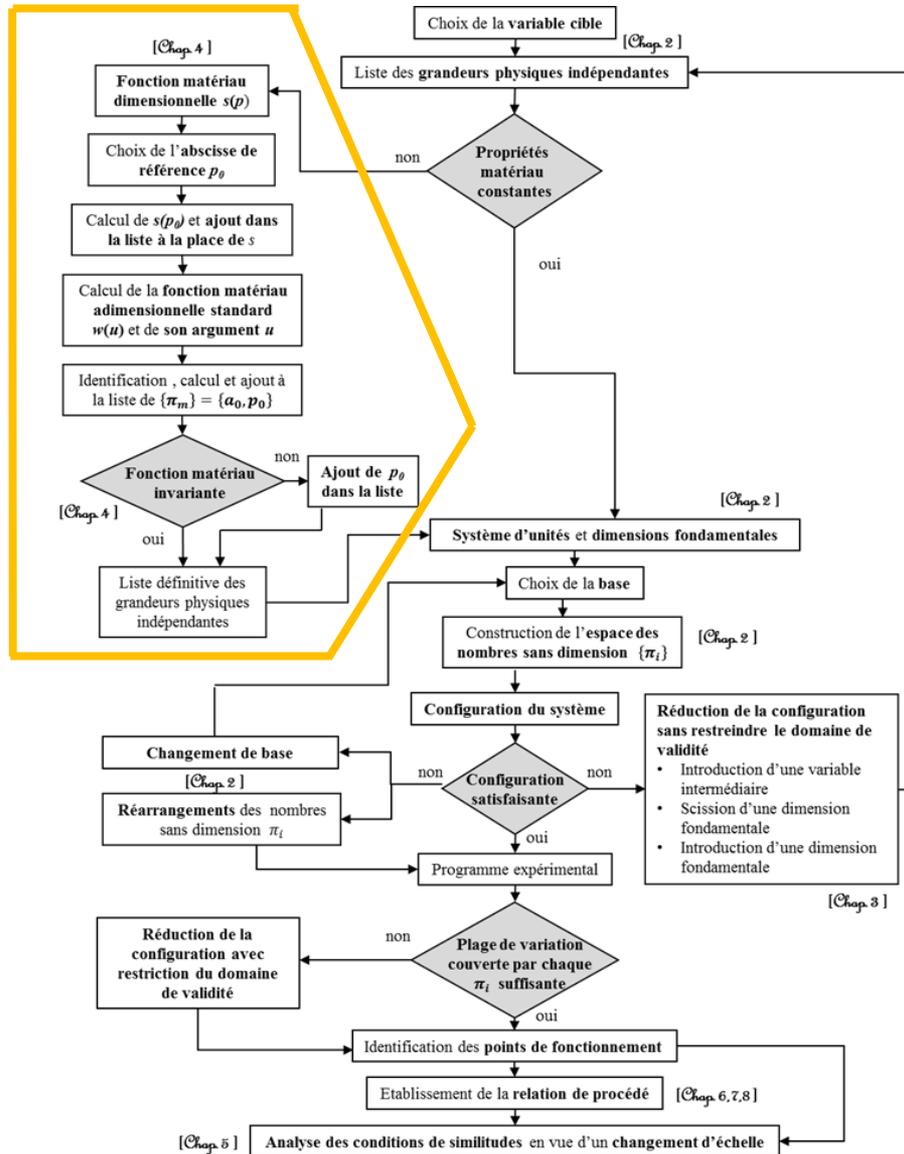


Fonction matériau *adimensionnelle standard*
 $w(u)$



Toutes ces solutions de saccharose sont similaires !

II. | Phase 3 : Définition de la Configuration MATERIAU



1

Point de départ :
fonction matériau $s(p)$

2

Adimensionalisation de la
fonction matériau
par la méthode standard

3

Construction de la
configuration matériau

II. | Phase 3 : Définition de la Configuration MATERIAU

Outre les avantages précédemment cités, l'intérêt de la fonction matériau adimensionnelle standard est de pouvoir définir la

```
graph TD; A[CONFIGURATION MATÉRIAU] --> B[Ensemble des grandeurs physiques et mesures internes liées à la propriété physique non constante]; A --> C[à ajouter à la configuration initiale (i.e. celle qui aurait été établie dans un procédé analogue où la propriété pourrait être considérée constante)];
```

CONFIGURATION MATÉRIAU

**Ensemble des grandeurs physiques
et mesures internes liées à la
propriété physique non constante**

à ajouter à la configuration initiale
(i.e. celle qui aurait été établie dans
un procédé analogue où la propriété
pourrait être considérée constante)

II. | Phase 3 : Définition de la Configuration MATERIAU

ETABLISSEMENT DE LA LISTE COMPLÈTE DES GRANDEURS INFLUENÇANT LA VARIABLE CIBLE

Etape 1 Lister *toutes* les grandeurs physiques indépendantes influençant la variable cible, à l'**exception de la propriété physique s non constante du matériau**

Etape 2 Lister l'**abscisse de référence p_0** sauf si la fonction matériau a des propriétés d'invariance



Ajout d'une mesure interne de la forme

$$\frac{p_0}{\{base\}}$$

II. | Etape 3 : Définition de la Configuration MATERIAU

ETABLISSEMENT DE LA LISTE COMPLÈTE DES GRANDEURS INFLUENÇANT LA VARIABLE CIBLE

Etape 3 Lister $s(p_0)$, c'est-à-dire la propriété physique non constante du matériau $s(p)$, calculée à l'abscisse de référence p_0



Conséquence : selon p_0 choisi,

- Les gammes couvertes par les $\{\pi_i\}$ vont être différentes
- La forme mathématique de la relation de procédé peut changer



Cela reste vrai même si FMAS invariante, sauf que, dans ce cas, la configuration est réduite d'une mesure interne

II. | Etape 3 : Définition de la Configuration MATERIAU

ETABLISSEMENT DE LA LISTE COMPLÈTE DES GRANDEURS INFLUENÇANT LA VARIABLE CIBLE

Etape 4 Lister l'ensemble des nombres sans dimension, noté $\{\pi_m\}$, qui apparaît dans l'argument u de la fonction matériau adimensionnelle standard w à l'exception du ratio (p/p_0)

$$\{\pi_m\} = \{a_0 \cdot p_0\}$$



Si expression analytique connue de $s(p)$:

- $\{a_0 \cdot p_0\} =$ combinaison algébrique d' 1 ou plusieurs nombres sans dimension
- **Configuration matériau complètement explicite**



Si expression analytique non connue de $s(p)$:

- $\{a_0 \cdot p_0\}$
- Configuration matériau **pas complètement explicite**

II. | Etape 3 : Définition de la Configuration MATERIAU

EXEMPLES

Fluide pseudoplastique

$$\mu_a(\dot{\gamma}) = k \cdot \dot{\gamma}^n$$

on montre que : $w(u) = \left(\frac{u}{n-1} + 1 \right)^{n-1}$

= fonction matériau **invariante**



À ajouter à la liste initiale

$$\{ \cancel{\dot{\gamma}_0}, \mu_0, n \}$$

II. | Etape 3 : Définition de la Configuration MATERIAU

EXEMPLES

Fluide de Bingham

$$\mu_a(\dot{\gamma}) = \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} + \mu_p$$

on montre que :

$$u = Bi. \left(1 - \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0} \right) \quad w(u) = 1 + \frac{u}{1 - \frac{u}{Bi}}$$

$$\text{avec } Bi = \frac{\tau_y}{\mu_0 \cdot \dot{\gamma}_0}$$

= fonction matériau **non invariante**



À ajouter à la liste initiale $\{ \dot{\gamma}_0 , \mu_0 , Bi \}$

II. | Etape 3 : Définition de la Configuration MATERIAU

CHOIX DE L'ABSCISSE DE RÉFÉRENCE

- N'importe quelle valeur de p_0 peut être choisie !
- Certains choix sont plus judicieux que d'autres car permettant de réduire la configuration du système

Exemple : **Fluide Bingham** $\mu_a(\dot{\gamma}) = \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} + \mu_p$

$$\text{Si } \dot{\gamma}_0 = \frac{\tau_y}{\mu_p} \longrightarrow \mu_0 = 2\mu_p \longrightarrow Bi = \frac{\tau_y}{\mu_0 \cdot \dot{\gamma}_0} = \frac{1}{2}$$

$$\{\dot{\gamma}_0, \mu_0, Bi\} \longrightarrow \{\dot{\gamma}_0, \mu_0\}$$

Plan

I. | *Introduction: Position du problème et Objectifs*

II. | *Les étapes de la démarche :*

- 1 *Fonction matériau,*
- 2 *Méthode d'adimensionalisation standard*
- 3 *Configuration matériau*

III. | *Cas d'étude :*

Analyse dimensionnelle du transfert de matière gaz-liquide dans une cuve mécaniquement agitée contenant des fluides pseudoplastiques

IV. | *Conclusion*

CONTEXTE

- *Domaine d'application* : traitement des eaux, bioprocédés
procédé de digestion des boues dans des conditions autotherme,
aérobie Thermophile (ATAD)
- **Réaction biologique** où **apport d'oxygène par bullage d'air**
- *Technologie*: **Cuve mécaniquement agitée, aérée en volume**
- **Boues milieux complexes** → **comportement non newtonien**

Objectifs

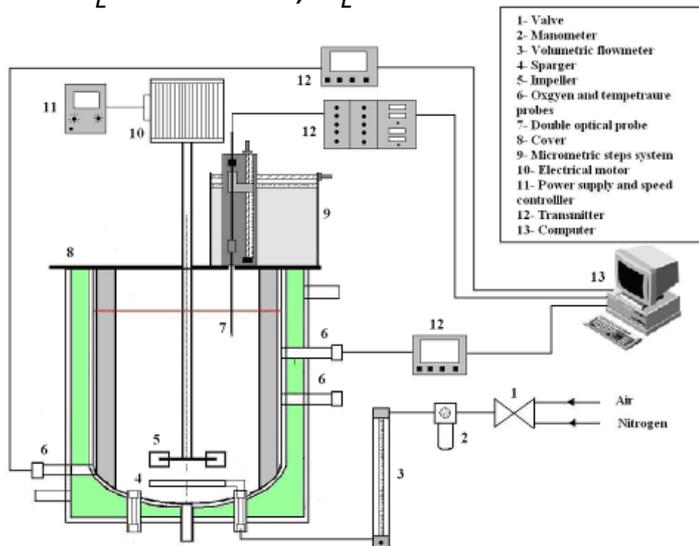
- Quantifier les **performances de transfert de matière gaz-liquide** (apport d'O₂)
- Comprendre **l'influence des conditions opératoires**

Approche

- Expérimentations dans une **maquette de laboratoire**
- **Fluides modèles** dont les comportements rhéologiques sont représentatifs de ceux des boues

Dispositif expérimental

$T = H_L = 21.2 \text{ cm} , V_L = 7.4 \text{ L}$



agitateur

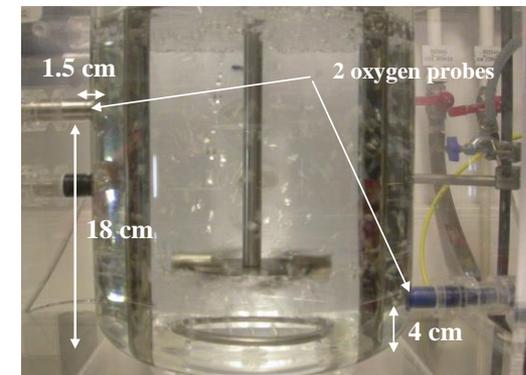


Distributeur d'air



Dispositif expérimental

- **Conditions opératoires** $100 < N < 1000$ tour/min
 $0.33 < Q_{air} < 3.33$ L/min
- **Régimes d'écoulement :** visualisations
- **Indicateur de performance du transfert de matière gaz-liquide**
= $k_L a$ coefficient volumique de transfert de matière gaz-liquide [s^{-1}]
 - **1^{ère} méthode :** méthode de réoxygénation (2 sondes)
 - **2^{ème} méthode :** méthode chimique statique (Painmanakul et al, 2005)
 - **Quantification de l'aération de surface**



Fluides

Table 2
Physical and rheological properties of the fluids.

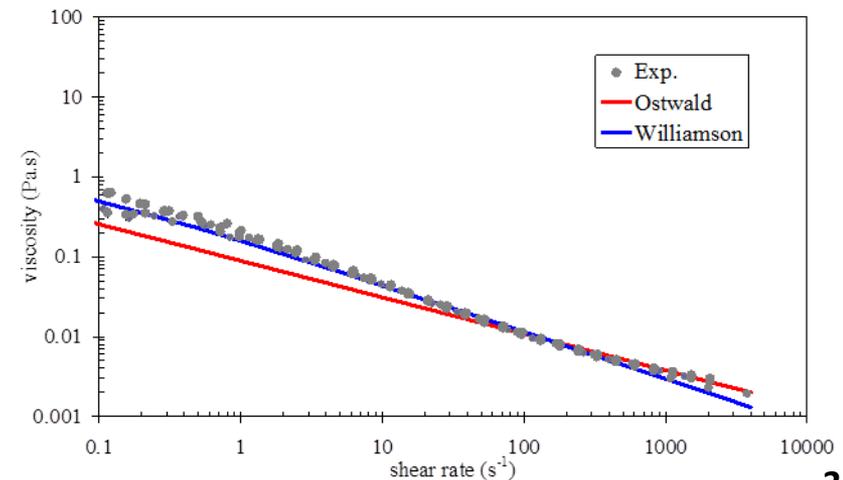
	ρ_l (kg/m ³)	μ_l (Pa s)	σ (N/m)	Ostwald-de-Waele's model:	
				K (Pa s ^{n})	n_{ost}
<i>Air</i>	1.18	1.85×10^{-5}	-	-	-
<i>Newtonian fluids</i>					
Deionised water	998	0.001	0.0728	-	-
Glycerine 50% [Gly50]	1145	0.0109	0.0456	-	-
Glycerine 70% [Gly70]	1195	0.0349	0.0503	-	-
<i>Non-Newtonian fluids</i>					
CMC 4 g/L [CMC4]	997	-	0.0717	0.1914	0.642
CMC 6 g/L [CMC6]	1006	-	0.0771	0.9470	0.527
Xanthan gum 1 g/L [XG1]	1013	-	0.0753	0.0890	0.543
Xanthan gum 2 g/L [XG2]	1032	-	0.0767	0.5084	0.373

Modèle d'Ostwald-de-Waele

[2 paramètres]

$$\mu_a = K \cdot \dot{\gamma}^{n_{ost}-1}$$

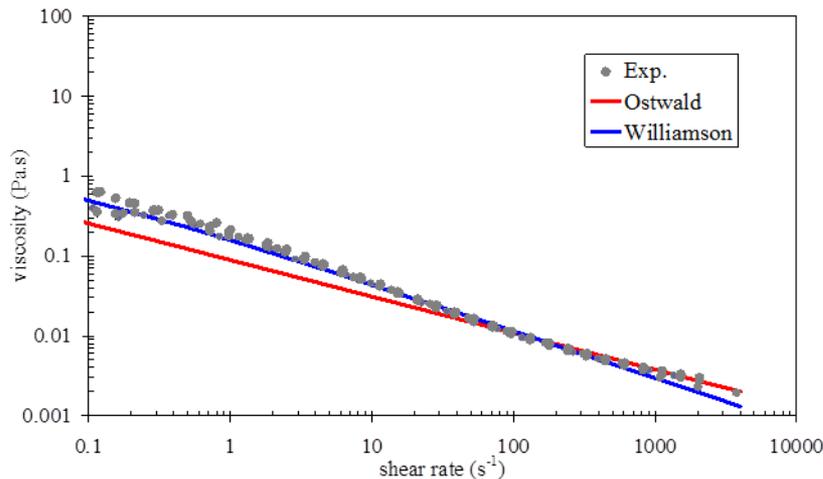
3 fluides newtoniens



Fluides

Table 2
Physical and rheological properties of the fluids.

	ρ_l (kg/m ³)	μ_l (Pa s)	σ (N/m)	Ostwald–de-Waele's model:		Williamson–Cross's model:		
				K (Pa s ^{n})	n_{ost}	μ_w (Pa s)	t_w (s)	n_w
<i>Air</i>	1.18	1.85×10^{-5}	-	-	-	-	-	-
<i>Newtonian fluids</i>								
Deionised water	998	0.001	0.0728	-	-	-	-	-
Glycerine 50% [Gly50]	1145	0.0109	0.0456	-	-	-	-	-
Glycerine 70% [Gly70]	1195	0.0349	0.0503	-	-	-	-	-
<i>Non-Newtonian fluids</i>								
CMC 4 g/L [CMC4]	997	-	0.0717	0.1914	0.642	0.091	0.029	0.546
CMC 6 g/L [CMC6]	1006	-	0.0771	0.9470	0.527	0.948	0.844	0.514
Xanthan gum 1 g/L [XG1]	1013	-	0.0753	0.0890	0.543	1.885	57.85	0.411
Xanthan gum 2 g/L [XG2]	1032	-	0.0767	0.5084	0.373	29,505	150.36	0.281



Modèle de Williamson-Cross

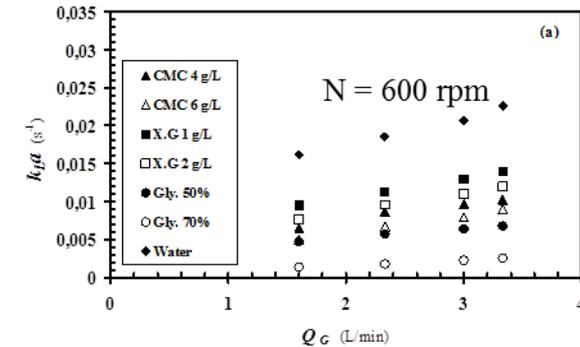
[3 paramètres]

$$\mu_a = \frac{\mu_w}{1 + (t_w \cdot \dot{\gamma})^{1-n_w}}$$

Résultats

Dimensional results for $k_f a$ (expressed in s^{-1}): Newtonian and non-Newtonian fluids.

N (rpm)	Q_G (L/min)	Newtonian fluids		Non-Newtonian fluids				
		Water	Gly50	Gly70	CMC4	CMC6	XG1	XG2
200	0.33	9.05×10^{-4}	-	-	-	-	-	-
	0.9	1.91×10^{-3}	-	-	-	-	-	-
	1.6	3.35×10^{-3}	7.75×10^{-4}	3.13×10^{-4}	1.64×10^{-3}	1.26×10^{-3}	1.55×10^{-3}	1.31×10^{-3}
	2.33	4.58×10^{-3}	1.05×10^{-3}	4.22×10^{-4}	2.08×10^{-3}	1.85×10^{-3}	2.06×10^{-3}	1.47×10^{-3}
	3	5.33×10^{-3}	1.45×10^{-3}	5.15×10^{-4}	2.58×10^{-3}	2.01×10^{-3}	2.68×10^{-3}	2.16×10^{-3}
400	3.33	5.88×10^{-3}	1.77×10^{-3}	5.75×10^{-4}	2.82×10^{-3}	2.3×10^{-3}	2.85×10^{-3}	2.56×10^{-3}
	0.33	2.31×10^{-3}	-	-	-	-	-	-
	0.9	4.91×10^{-3}	-	-	-	-	-	-
	1.6	8.69×10^{-3}	2.90×10^{-3}	6.82×10^{-4}	3.68×10^{-3}	2.54×10^{-3}	4.83×10^{-3}	3.61×10^{-3}
	2.33	1.12×10^{-2}	3.50×10^{-3}	8.00×10^{-7}	4.43×10^{-3}	4.40×10^{-3}	5.93×10^{-3}	4.81×10^{-3}
600	3	1.29×10^{-2}	4.28×10^{-3}	9.99×10^{-4}	4.98×10^{-3}	4.98×10^{-3}	6.59×10^{-3}	6.51×10^{-3}
	3.33	1.31×10^{-2}	4.63×10^{-3}	1.19×10^{-3}	5.19×10^{-3}	5.53×10^{-3}	7×10^{-3}	8.01×10^{-3}
	0.33	4.30×10^{-3}	-	-	-	-	-	-
	0.9	9.19×10^{-3}	-	-	-	-	-	-
	1.6	1.62×10^{-2}	4.72×10^{-3}	1.38×10^{-3}	7.51×10^{-3}	3.99×10^{-3}	9.52×10^{-3}	7.68×10^{-3}
800	2.33	1.82×10^{-2}	5.73×10^{-3}	1.77×10^{-3}	8.60×10^{-3}	6.90×10^{-3}	1.13×10^{-2}	9.57×10^{-3}
	3	2.06×10^{-2}	6.39×10^{-3}	2.25×10^{-3}	9.23×10^{-3}	8.20×10^{-3}	1.30×10^{-2}	1.11×10^{-2}
	3.33	2.26×10^{-2}	6.78×10^{-3}	2.55×10^{-3}	9.44×10^{-3}	9.05×10^{-3}	1.39×10^{-2}	1.20×10^{-2}
	0.33	4.94×10^{-3}	-	-	-	-	-	-
	0.9	1.39×10^{-2}	-	-	-	-	-	-
1000	1.6	2.26×10^{-2}	6.87×10^{-3}	2.35×10^{-3}	1.14×10^{-2}	6.40×10^{-3}	1.29×10^{-2}	1.08×10^{-2}
	2.33	2.68×10^{-2}	7.61×10^{-3}	3.31×10^{-3}	1.32×10^{-2}	8.30×10^{-3}	1.51×10^{-2}	1.28×10^{-2}
	3	2.81×10^{-2}	8.14×10^{-3}	3.97×10^{-3}	1.45×10^{-2}	9.17×10^{-3}	1.79×10^{-2}	1.43×10^{-2}
	3.33	3.21×10^{-2}	8.45×10^{-3}	4.46×10^{-3}	1.48×10^{-2}	9.75×10^{-3}	1.87×10^{-2}	1.57×10^{-2}
	0.33	1.05×10^{-2}	-	-	-	-	-	-



Etat de l'art

- **Corrélations dimensionnelles**
- **Prise en compte du caractère non-newtonien : $\mu \rightarrow \mu_{app}$**
Modèle d'Ostwald-de-Waele + Concept de Metzner-Otto ($\dot{\gamma}_{av} = K.N$)

Problématiques

- **comment quantifier l'influence des différents paramètres sur k, a ?**
- **comment dissocier l'influence isolée de la rhéologie ?**
- **comment procéder pour garantir que les résultats obtenus avec des fluides newtoniens peuvent être étendus aux fluides non-newtoniens ?**
- **comment procéder pour garantir que les résultats obtenus à échelle 1 sont extrapolables à l'échelle F ?**



ANALYSE DIMENSIONNELLE

Variable cible

$k_L a$

Liste des grandeurs physiques

CAS NEWTONIEN

- Paramètres *géométriques* : agitateur (D), distributeur (D_S)
- Paramètres *de procédé* : g N U_g
- Paramètres « *matériau* » : ρ_l μ_l ρ_g μ_g σ \mathcal{D}_{diff}

Conditions
d'étude

$\{ k_L a, \rho_g, \mu_g, g, U_g, N, D, D_S, \rho_l, \mathcal{D}_{diff}, \sigma, \mu_l \}$

Matrice aux dimensions

CAS NEWTONIEN

	$k_l a$	U_g	N	D	D_s	ρ_l	μ_l	σ	D_{diff}	ρ_g	μ_g	g
M	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0
L	0	1	0	1	1	-3	-1	0	2	-3	-1	1
T	-1	-1	-1	0	0	0	-1	-2	-1	0	-1	-2

Choix des variables répétées

- Conditions requises :
 - 3 (nombre de dimensions fondamentales)
 - *dimensionnellement indépendantes* ($\det C \neq 0$)
- **Choix arbitraire, mais ... raisonné pour parvenir *directement* au jeu de nombres π_i le plus « pertinent » par rapport au programme expérimental**



$$\left\{ \rho_g, \mu_g, g \right\}$$

phase gaz = constante,
1 π_i pour 1 paramètre influençant

Matrices résiduelle et centrale

CAS NEWTONIEN

	$k_l a$	U_g	N	D	D_s	ρ_l	μ_l	σ	D_{diff}	ρ_g	μ_g	g
M	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0
L	0	1	0	1	1	-3	-1	0	2	-3	-1	1
T	-1	-1	-1	0	0	0	-1	-2	-1	0	-1	-2

Matrice résiduelle

Matrice centrale

Théorème de Vachy-Buckingham

$$n_{\pi_i} = n_{\text{variables}} - n_{\text{dim fondam}} = 12 - 3 = 9$$

Matrice aux dimensions modifiées

CAS NEWTONIEN

$k_l a$	U_g	N	D	ρ_l	μ_l	σ	D_{diff}	ρ_g	μ_g	g
1/3	-1/3	1/3	-2/3	1	0	-1/3	-1	1	0	0
-1/3	1/3	-1/3	2/3	0	1	4/3	1	0	1	0
2/3	1/3	-2/3	-1/3	0	0	1/3	0	0	0	1

Jeu de nombres sans dimension

$$\pi_1 = \frac{k_l a}{\rho_g^{1/3} \cdot \mu_g^{-1/3} \cdot g^{2/3}}$$

$$\pi_3 = \frac{N}{\rho_g^{1/3} \cdot \mu_g^{-1/3} \cdot g^{2/3}}$$

$$\pi_5 = \frac{\rho_l}{\rho_g}$$

$$\pi_7 = \frac{\sigma}{\rho_g^{-1/3} \cdot \mu_g^{4/3} \cdot g^{1/3}}$$

$$\pi_2 = \frac{U_g}{\rho_g^{-1/3} \cdot \mu_g^{1/3} \cdot g^{1/3}}$$

$$\pi_4 = \frac{D}{\rho_g^{-2/3} \cdot \mu_g^{2/3} \cdot g^{-1/3}}$$

$$\pi_6 = \frac{\mu_l}{\mu_g}$$

$$\pi_8 = \frac{D}{\rho_g^{-1} \cdot \mu_g}$$

$$\pi_9 = \frac{D_s}{\rho_g^{-2/3} \cdot \mu_g^{2/3} \cdot g^{-1/3}}$$

Réarrangements et Configuration réduite

CAS NEWTONIEN

$$\pi_4 \cdot (\pi_3)^2 = Fr$$

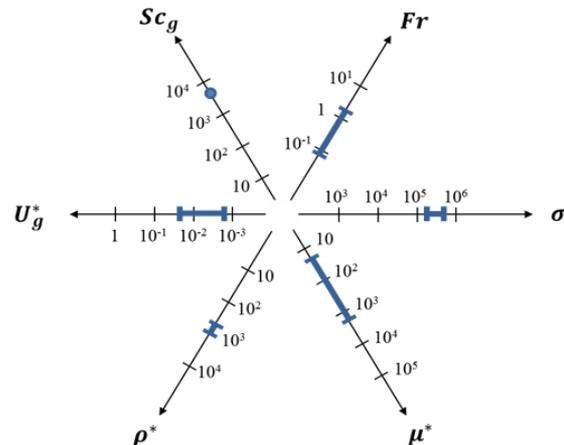
$$\pi_8 \equiv 1/Sc$$

~~$$\pi_4, \pi_9 \quad (D = cte, D_s = cte)$$~~

$$\rho^* = \frac{\rho_l}{\rho_g} \approx cte \quad Sc = \frac{\nu_g}{D} = ct$$

à T, P donnés, pour une géométrie cuve/agitateur/aérateur donnée

$$k_l a^* = k_l a \left(\frac{\nu_g}{g^2} \right)^{1/3} = F_N \left(U_g^* = \frac{u_g}{(\nu_g \cdot g)^{1/3}} ; Fr = \frac{N^2 \cdot d}{g} ; \sigma^* = \frac{\sigma}{(\rho_g^3 \cdot \nu_g^4 \cdot g)^{1/3}} ; \mu^* = \frac{\mu_l}{\mu_g} \right)$$



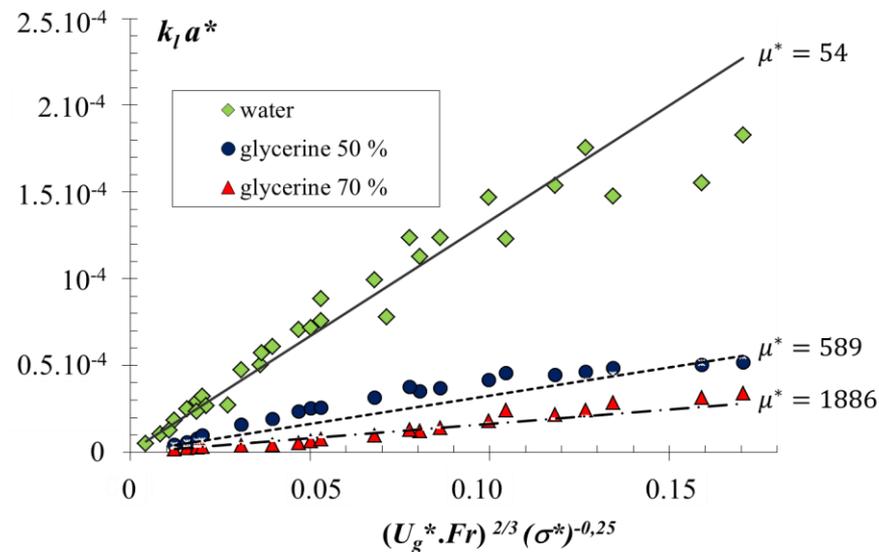
Relation de procédé

CAS NEWTONIEN

- Forme polynomiale

$$k_1 a^* = 0.2097 \cdot (Fr \cdot U_g^*)^{2/3} \cdot (\mu^*)^{-0.591} \cdot (\sigma^*)^{-0.245}$$

- Dissociation de l'effet de la viscosité



EXTENSION AUX CAS NON NEWTONIENS

Liste des grandeurs physiques *supplémentaires*

$$\left\{ k_L a, \rho_g, \mu_g, g, U_g, N, D, D_S, \rho_l, \mathcal{D}_{\text{diff}}, \right. \\ \left. \mu_0 = \mu_a(\dot{\gamma}_0), \dot{\gamma}_0, \{\pi_{\text{rhéo}}\} \right\}$$

Dépend de la *fonction matériau choisie* :
 modèle d'Ostwald-de-Waele
 ou, modèle de Williamson-Cross

EXTENSION AUX CAS NON NEWTONIENS

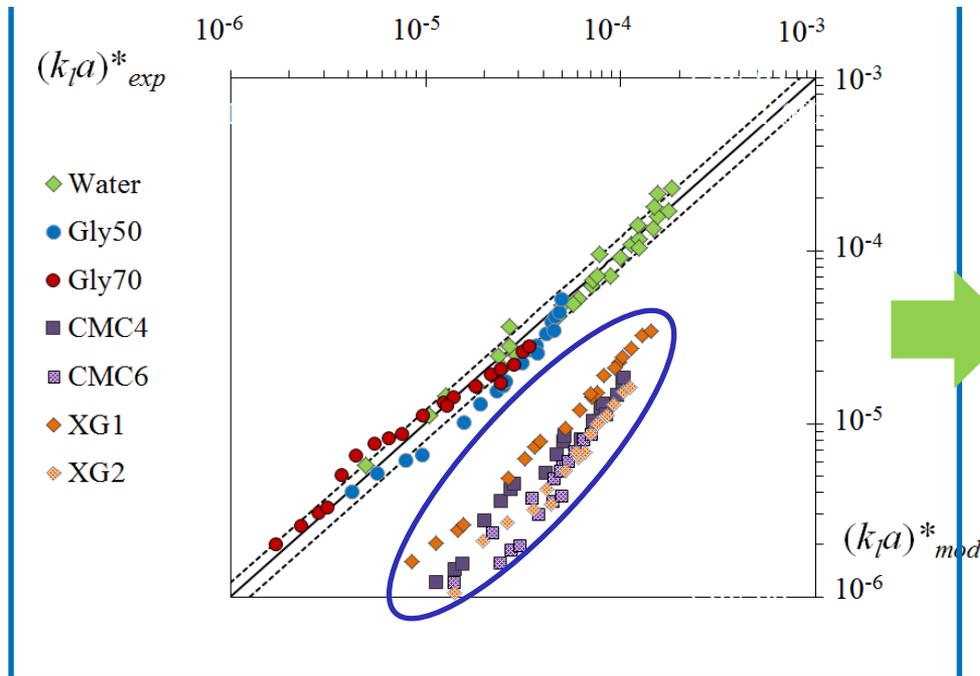
Ostwald-de-Waele

$$k_l a^* = k_l a \left(\frac{v_g}{g^2} \right)^{1/3} = F_N \left(U_g^* = \frac{u_g}{(v_g \cdot g)^{1/3}} ; Fr = \frac{N^2 \cdot d}{g} ; \sigma^* = \frac{\sigma}{(\rho_g^3 \cdot v_g^4 \cdot g)^{1/3}} ; \mu^* = \frac{\mu_l}{\mu_g} \right)$$

$$k_l a^* = 0,21 (Fr \cdot U_g^*)^{2/3} (\mu^*)^{-0,59} (\sigma^*)^{-0,25} (n_{ost})^{a_4}$$

*Configuration matériau
(fonction invariante)*

$$\left\{ \mu^* = \frac{\mu_0}{\mu_g} ; n_{ost} \right\}$$

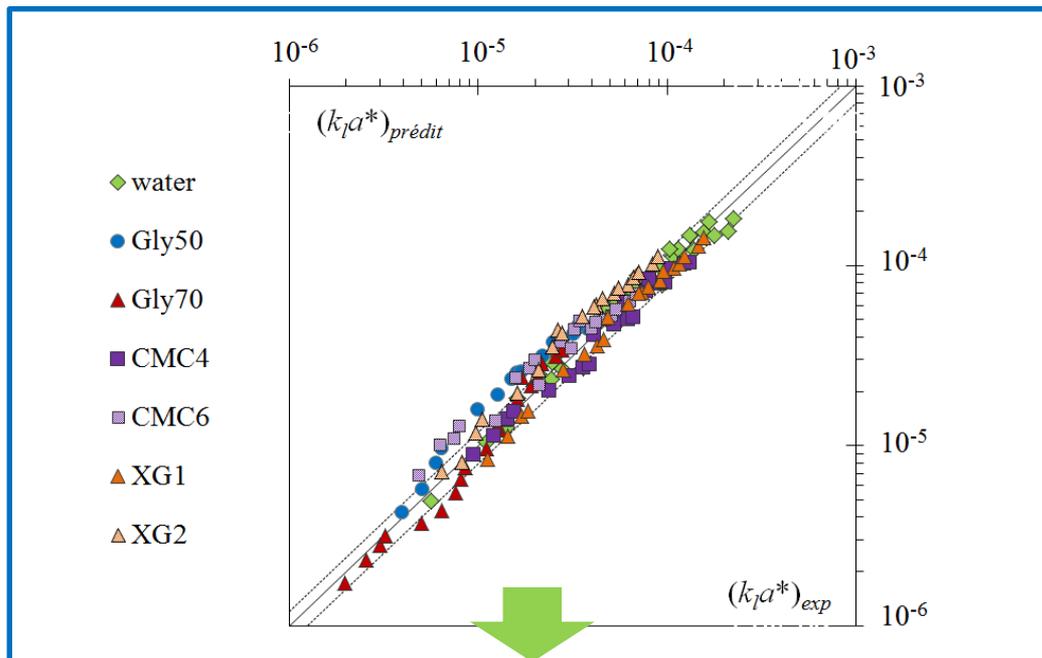


**Ajouter une seule mesure interne,
 n_{ost} n'est pas suffisant**

EXTENSION AUX CAS NON NEWTONIENS

Cross-Williamson

$$k_l a^* = k_l a \left(\frac{v_g}{g^2} \right)^{1/3} = F_N \left(U_g^* = \frac{u_g}{(v_g \cdot g)^{1/3}} ; Fr = \frac{N^2 \cdot d}{g} ; \sigma^* = \frac{\sigma}{(\rho_g^3 \cdot v_g^4 \cdot g)^{1/3}} ; \mu^* = \frac{\mu_l}{\mu_g} \right)$$



Courbe maitresse unique

$$k_l a^* = 0,21 (Fr \cdot U_g^*)^{2/3} (\mu^*)^{-0,59} (\sigma^*)^{-0,25} (n_w)^{-2,4} (t_w^*)^{-0,17}$$

Configuration matériau

Fonction non invariante

Choix pertinent de $\dot{\gamma}_0$

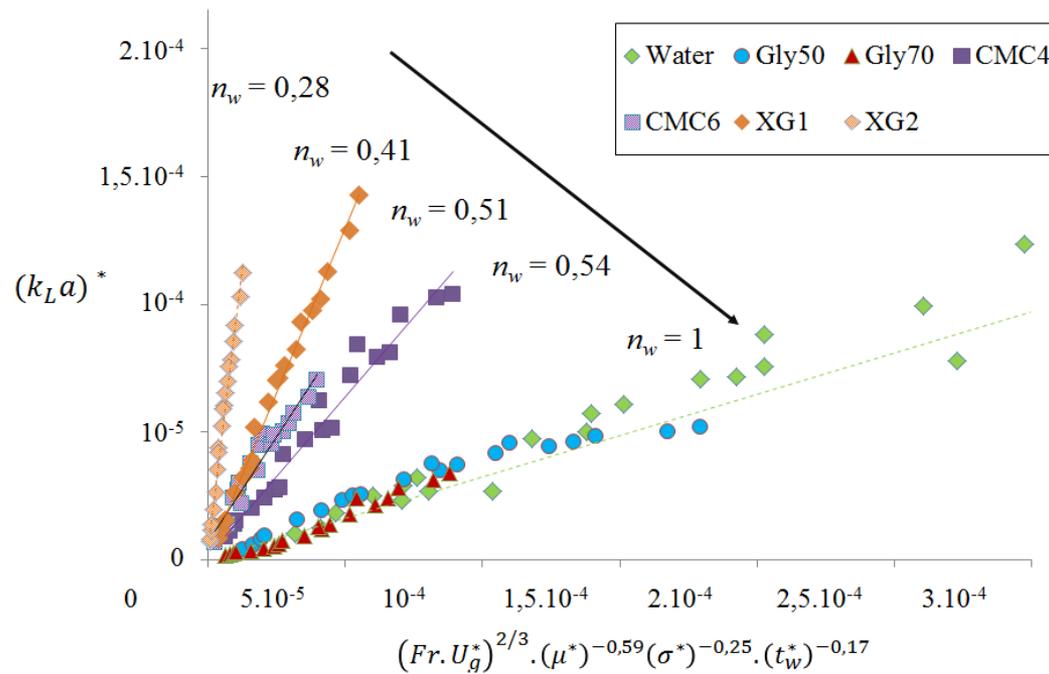
$$\dot{\gamma}_0 = \frac{1}{t_w} \rightarrow t_w \cdot \dot{\gamma}_0 = 1$$

$$\left\{ \mu^* = \frac{\mu_0}{\mu_g} ; n_w ; t_w^* = \frac{1}{t_w} \left(\frac{v_g}{g^2} \right)^{1/3} \right\}$$

EXTENSION AUX CAS NON NEWTONIENS

Cross-Williamson

L'effet des paramètres rhéologiques peut être dissocié



CONCLUSION

- Une **courbe maitresse unique** peut être obtenue avec fluides newtoniens et non newtoniens ssi **la configuration matériau est bien décrite**
- **Possibilité de s'affranchir du concept de Metzner et Otto** pour définir le taux de cisaillement de référence

Plan

I. | *Introduction: Position du problème et Objectifs*

II. | *Les étapes de la démarche :*

- 1 *Fonction matériau,*
- 2 *Méthode d'adimensionalisation standard*
- 3 *Configuration matériau*

III. | *Cas d'étude :*

Analyse dimensionnelle du transfert de matière gaz-liquide dans une cuve mécaniquement agitée contenant des fluides pseudoplastiques

IV. | *Conclusion*

- **Nécessité de prendre en compte la non-constance d'une propriété physique dans la modélisation par analyse dimensionnelle**
- Application du cadre théorique défini par Pawlowski (1991)
- **Fonction matériau, méthode d'adimensionalisation standard, configuration matériau**
- **Similitude matériau**
- **Espace des nombres sans dimension élargi par la configuration matériau**

- Cadre théorique applicable *quelle que soit* la propriété physique

